

## Periodiska funktioner

Funktionen  $x(t)$  är  **$L$ -periodisk** om

$$L > 0 \text{ och } x(t + L) = x(t) \text{ för alla } t.$$

Om  $x(t)$  är periodisk men inte konstant, finns (för "normala"  $x(t)$ ) en minsta period, **fundamentalperioden**.

Den  **$L$ -periodiska fortsättningen** av funktionen  $y(t)$ :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} y(t - nL), \quad (\text{om serien är konvergent}).$$

## Beskrivning av signaler

I huvudsak finns det **diskreta** signaler,  $x[0], x[1], x[2], \dots$ , (som vi inte sysslar med i den här kursen) och **tidskontinuerliga signaler**  $x(t)$ .

För att beskriva vissa typer av tidskontinuerliga signaler, t.ex. elektriska urladdningar och mekaniska stötar, räcker inte vanliga funktioner.

Sådana mycket kortvariga "pulser" med stor amplitud beskrivs av en idealisering,  **$\delta$ -funktionen** eller  $\delta$ -pulsen. Den har egenskaperna

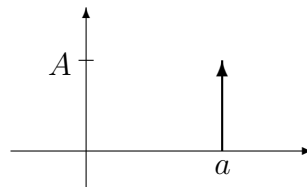
$$\begin{cases} \delta(t) = 0, & \text{om } t \neq 0 \\ \int_a^b \delta(t) dt = \begin{cases} 1, & \text{om } a < 0 < b \\ 0, & \text{om } 0 < a, b \text{ eller } a, b < 0 \end{cases} \end{cases}$$

Den kan ses som ett slags gränsvärde av  $\frac{1}{a}\varphi(\frac{t}{a})$  då  $a \rightarrow 0+$ , där  $\varphi(t)$  är en funktion som är 0 utanför något intervall och  $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) dt = 1$ .

$\delta(t)$  är ett exempel på en **generaliserad funktion** eller **distribution**.

Man brukar rita "grafnen" för  $A\delta(t - a)$

som en pil av höjd  $A$  i punkten  $a$ :



Om  $x(t)$  är en snäll funktion (kontinuerlig för  $t = a$ ) gäller

$$\delta(t - a)x(t) = \delta(t - a)x(a),$$

så  $\delta(t - a)$  "tar ut" värdet  $x(a)$  ("sampling").

I en matematiskt strikt beskrivning av generaliserade funktioner definieras de av hur de "verkar på" snälla funktioner, testfunktioner.

Då **definieras**  $\delta(t)$  av att, för snälla funktioner  $x(t)$ ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - a)x(t) dt = x(a).$$

Speciellt får man att  $\delta(t)$  fungerar som en 1:a vid faltning,

$$(x * \delta)(t) = x(t).$$

Ur det följer för fouriertransformen av  $\delta(t)$  att

$$\hat{\delta}(\omega) = 1, \text{ alla } \omega.$$