(Signaler & system I, ht08: L7, må 15 september)

Linjära differentialekvationer med periodiskt högerled

För att finna en partikulärlösning till den inhomogena linjära ekvationen

$$L(y) = f(t), \quad f(t)\ T\text{-periodisk},$$

kan man fourierserieutveckla $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{2\pi nt}{T} + b_n \sin\frac{2\pi nt}{T})$ och finna en partikulärlösning för en term i taget som högerled och sedan superponera. Om man inte har **resonans** (dvs om inte någon av termerna är en lösning till den homogena ekvationen) blir också partikulärlösningen T-periodisk.

Komplexa fourierserier

Låt funktionen $x(t)$ vara definierad (och "snäll") i $[-\pi, \pi]$.
Med Eulers formel $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$ kan den reella fourierserien,

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt), \text{ med } \begin{cases} a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\cos nt\,dt \\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\sin nt\,dt \end{cases}$$

formas om till den komplexa,

$$\boldsymbol{x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int},} \text{ med } \boldsymbol{c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)e^{-int}\,dt.}$$

Den dubbelt oändliga serien skall tolkas som $\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int}$.
Sambanden mellan koefficienterna i de två serierna är (för $n = 0, 1, 2, \dots$)

$$\begin{cases} c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \\ c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) \end{cases} \qquad \begin{cases} a_n = c_n + c_{-n} \\ b_n = i(c_n - c_{-n}) \end{cases}$$

Dvs $\{e^{int}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ är en ortogonal, fullständig mängd funktioner på intervallet $[-\pi, \pi]$ med **inre produkten** $\boldsymbol{(x, y) = \int_{-\pi}^{\pi} x(t)\overline{y(t)}\,dt}$,
så $(e^{imt}, e^{int}) = 0$ då $m \neq n$, medan $(e^{int}, e^{int}) = 2\pi$.

Fouriertransformer

Om $x(t)$ är definierad på $[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$ gäller $\begin{cases} x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{i2\pi nt}{L}} \\ c_n = \frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x(t)e^{-\frac{i2\pi nt}{L}}\,dt \end{cases}$.

Med $\omega_n = \frac{2\pi n}{L}$, $X(\omega_n) = Lc_n$ "fås" då $L \to \infty$ (Riemannsumma!)

$$\begin{cases} \boldsymbol{x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega} \\ \boldsymbol{X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t}\,dt} \end{cases}$$

$X(\omega)$ (ofta betecknad $\hat{x}(\omega)$) är **fouriertransformen av $\boldsymbol{x(t)}$**.

Parsevals relation ("Pythagoras sats i oändlig dimension")

Om $x(t)$ har fourierserien $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$,

$$\|x(t)\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |x(t)|^2\,dt = \pi(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2.$$

Motsvarande för fouriertransformen,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2\,d\omega.$$