(Signaler & system I, ht08: L6, to 11 september)

Efter att vi haft **kontrollskrivning 1** under en timme, talade vi om

Cosinus- och sinusserier

Låt $f(x)$ vara definierad i intervallet $[0, \pi]$.

1. $f(x)$ kan fortsättas till en **jämn, 2π-periodisk** funktion $\boldsymbol{f_j(x)}$ enligt

$$\begin{cases} f_j(x) = f(x) & 0 \le x \le \pi, \\ f_j(x) = f(-x) & -\pi \le x \le 0, \\ f_j(x+2\pi) = f_j(x) & \text{alla } x \end{cases}$$

Eftersom $f_j(x)$ är jämn, innehåller dess fourierserie inga sin-termer, så

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad 0 \le x \le \pi,$$

där $a_n (= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_j(x) \cos nx\, dx) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \cos nx\, dx$, $\boldsymbol{f}$**:s cosinusserie**.

2. $f(x)$ kan fortsättas till en **udda, 2π-periodisk** funktion $\boldsymbol{f_u(x)}$ enligt

$$\begin{cases} f_u(x) = f(x) & 0 \le x \le \pi, \\ f_u(x) = -f(-x) & -\pi \le x \le 0, \\ f_u(x+2\pi) = f_u(x) & \text{alla } x \end{cases}$$

Eftersom $f_u(x)$ är udda, innehåller dess fourierserie inga cos-termer, så

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad 0 \le x \le \pi,$$

där $b_n (= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_u(x) \sin nx\, dx) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \sin nx\, dx$, $\boldsymbol{f}$**:s sinusserie**.

3. Om $f(x)$ i stället fortsätts till en **π-periodisk** funktion $\boldsymbol{f_p(x)}$ enligt

$$\begin{cases} f_p(x) = f(x) & 0 \le x \le \pi, \\ f_p(x+\pi) = f_p(x) & \text{alla } x \end{cases}$$

innehåller f_p:s fourierserie bara varannan term i en 2π-periodisk funktions,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n' \cos 2nx + b_n' \sin 2nx), \quad 0 \le x \le \pi,$$

där $a_n' = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \cos 2nx\, dx (= a_{2n})$, $b_n' = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \sin 2nx\, dx (= b_{2n})$.

De tre utvecklingarna ovan svarar mot de fullständiga ortogonala systemen $\boldsymbol{\{\cos nx\}_{n=0}^{\infty}}$, $\boldsymbol{\{\sin nx\}_{n=0}^{\infty}}$ och $\boldsymbol{\{\cos 2nx, \sin 2nx\}_{n=0}^{\infty}}$ av funktioner på $[0, \pi]$.