(Signaler & system I, ht08: L5, on 10 september)

Ett **linjärt homogent autonomt** system, $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\underset{n\times n}{\mathbf{A}}$ konstant, har **fundamentalmatrisen** $\boldsymbol{\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t}}$, där för en kvadratisk matris B, $e^B = I + B + \frac{1}{2}B^2 + \frac{1}{6}B^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}B^n$.

Fourierserier

Om $f(x)$ är en 2π-periodisk funktion är dess **fourierserie**

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

där $\begin{cases} a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, & n = 0, 1, \ldots \\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, & n = 1, 2, \ldots \end{cases}$

Om $f(x)$ i stället är $2p$-periodisk är fourierserien

$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos \frac{n\pi x}{p} + b_n \sin \frac{n\pi x}{p})$, där $\begin{cases} a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos \frac{n\pi x}{p}\,dx, & n = 0, 1, \ldots \\ b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\sin \frac{n\pi x}{p}\,dx, & n = 1, 2, \ldots \end{cases}$

Inre produkten av $f(x)$ och $g(x)$: $(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx$
(jfr med skalärprodukten $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$ för vektorer i rummet)
Normen för $f(x)$: $\|f\| = \sqrt{(f, f)}$

Om $\{\varphi_n\}$ är en mängd **ortogonala** funktioner,
dvs $(\varphi_m, \varphi_n) = 0$ då $m \neq n$ (t.ex. $\{1, \cos mx, \sin nx\}$), så gäller att

$$\|f - \sum_{n=1}^{N} c_n\varphi_n\| \text{ minimeras av } c_n = \frac{(f, \varphi_n)}{\|\varphi_n\|^2}$$

Om $\{\varphi_n\} = \{1, \cos mx, \sin nx\}$ (t.ex.), så gäller med dessa c_n (dvs a_n, b_n ovan)

$$\lim_{N\to\infty} \|f - \sum_{n=1}^{N} c_n\varphi_n\| = 0.$$

$\{1, \cos mx, \sin nx\}$ fungerar alltså som **en ortogonal bas** i rummet av funktioner och f:s fourierserie konvergerar i denna mening mot f.

Om f och f' båda är styckvis kontinuerliga gäller dessutom för alla x att

$$\tfrac{1}{2}(f(x+) + f(x-)) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Speciellt konvergerar serien mot $f(x)$ i alla punkter där f är kontinuerlig.

I ett exempel gav oss detta $\boldsymbol{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$

Gibbs fenomen

Om $f(x)$ har ett språng kommer seriens summor att vid språnget ”svänga över” med ca 0,089·språnget, se exemplet i fig.