(Signaler & system I, ht08: L4, må 8 september)

Homogena, autonoma system, igen, dvs $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\underset{n\times n}{\mathbf{A}}$ konstant:

Från förut: **Om A** har n linjärt oberoende **egenvektorer** $\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n$ med $\mathbf{A}\mathbf{k}_i = \lambda_i \mathbf{k}_i$ (speciellt om alla λ_i är olika eller $\mathbf{A}$ är symmetrisk) är den allmänna lösningen

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i t}\mathbf{k}_i, \text{ dvs man kan välja } \mathbf{\Phi}(t) = \left(e^{\lambda_1 t}\mathbf{k}_1 \dots e^{\lambda_n t}\mathbf{k}_n\right).$$

Vi studerar speciellt för $n = 2$ **fasporträtt** för systemet, dvs en bild av x_1x_2-planet (kallat xy-planet), **fasplanet**, med ett antal **banor** (eller trajektorior), kurvorna $(x(t), y(t))$, inritade. Det ger förståelse för systemets beteende, t.ex. stabilitet.
Om den konstanta och reella 2×2-matrisen $\mathbf{A}$ har egenvärdena λ_1 och λ_2, båda $\neq 0$, är origo en punkt av någon av följande typer:

Sadelpunkt
$\lambda_{1,2}$ reella, olika tecken, $\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{k}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{k}_2$,
$\mathbf{x}(t) = 0$ en **instabil** lösning

Nod
$\lambda_{1,2}$ reella, samma tecken $\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{k}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{k}_2$
$\mathbf{x}(t) = 0$ **instabil** om $\lambda_{1,2} > 0$, **stabil** om $\lambda_{1,2} < 0$

Spiral
$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, α, $\beta \neq 0$ $\mathbf{k} = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$
$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\alpha t}(\mathbf{a}\cos\beta t - \mathbf{b}\sin\beta t) + c_2 e^{\alpha t}(\mathbf{b}\cos\beta t + \mathbf{a}\sin\beta t)$
$\mathbf{x}(t) = 0$ **instabil** om $\alpha > 0$, **stabil** om $\alpha < 0$

Centrum
$\lambda_{1,2} = \pm i\beta$, $\beta \neq 0$
$\mathbf{x}(t) = c_1(\mathbf{a}\cos\beta t - \mathbf{b}\sin\beta t) + c_2(\mathbf{b}\cos\beta t + \mathbf{a}\sin\beta t)$
$\mathbf{x}(t) = 0$ en **stabil** lösning

Oegentlig nod
$\lambda_1 = \lambda_2$, reella, bara ”en” egenvektor
$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda t}\mathbf{k} + c_2 e^{\lambda t}(t\mathbf{k} + \mathbf{p})$, där $\mathbf{A}\mathbf{k} = \lambda\mathbf{k}$, $\mathbf{A}\mathbf{p} = \lambda\mathbf{p} + \mathbf{k}$
$\mathbf{x}(t) = 0$ **instabil** om $\lambda > 0$, **stabil** om $\lambda < 0$

Inhomogena linjära system, dvs $\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t)$

Om A är konstant och $\mathbf{f}(t)$ består av summor av produkter av polynom, cos, sin och exponentialfunktioner, kan **ansats** användas.

Allmännare, om **fundamentalmatrisen** $\mathbf{\Phi}(t)$ för det homogena systemet $\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$ är känd: **variation av parametrar**,
sätt $\mathbf{x} = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{u}(t)$. Problemet blir $\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{u}' = \mathbf{f}(t)$,

$$\left(\text{med lösningen } \mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\int_{t_0}^{t} \mathbf{\Phi}^{-1}(s)\mathbf{f}(s)\,ds + \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}(t_0)\mathbf{x}_0.\right)$$

Högre ordningars ekvationer är ekvivalenta med system av första ordningens,

Om en ekvation är av ordning n i y, inför $z_1 = y$, $z_2 = y'$, $\dots$, $z_n = y^{(n-1)}$.
Ekvationen motsvarar $z_2 = z_1{}'$, $z_3 = z_2{}'$, $\dots$, $z_n = z_{n-1}{}'$ och den ursprungliga ekvationen, uttryckt i z:na.