(Signaler & system I, ht08: L3, to 4 september)

Cramers regel (ett klassiskt resultat i linjär algebra)

Om A är en kvadratisk matris med $\det A \neq 0$, ges lösningen till det linjära ekvationssystemet $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ av

$$\boldsymbol{x_i} = \frac{\mathbf{det}\,\boldsymbol{A_i}}{\mathbf{det}\,\boldsymbol{A}}$$

där A_i är A med **den $\boldsymbol{i}$:e kolonnen utbytt mot högerledskolonnen $\boldsymbol{b}$**.

[Då detta tillämpas på ekvationssystemet för u_i':na vid variation av parametrarna, de integreras och resultaten sätts in i uttrycket för $y(x)$ fås

$$\boldsymbol{y(x) = \int_{x_0}^{x} G(x,t) f(t)\, dt + y_h(x)}$$

där

$$G(x,t) = \frac{1}{W(y_1,\ldots,y_n)(t)} \begin{vmatrix} y_1(t) & \ldots & y_n(t) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(t) & \ldots & y_n^{(n-2)}(t) \\ y_1(x) & \ldots & y_n(x) \end{vmatrix}$$]

Linjära system av första ordningens ODE:er

Sats: (Global och entydig lösbarhet för linjära system)

Låt $\underset{n\times n}{\mathbf{A}}(t)$ och $\underset{n\times 1}{\mathbf{f}}(t)$ vara **kontinuerliga** funktioner av t i intervallet I och $t_0 \in I$.

Då har för alla $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ (eller $\mathbb{C}^n$) **begynnelsevärdesproblemet**

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

en **entydig lösning** $\mathbf{x}(t)$ i **hela intervallet** I.

Superpositionsprincipen för **homogena** linjära system:

Om $\underset{n\times k}{\mathbf{X}} = (\mathbf{x}_1\, \mathbf{x}_2\, \ldots\, \mathbf{x}_k)$, där $\mathbf{x}_i$:na alla uppfyller $\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$ (så $\mathbf{X}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}$), så gör $\mathbf{x} = \mathbf{Xc} = c_1\mathbf{x}_1 + \cdots + c_k\mathbf{x}_k$ också det, för varje konstant $\underset{k\times 1}{\mathbf{c}}$.

Sats: Om $\underset{n\times n}{\mathbf{X}} = (\mathbf{x}_1\, \mathbf{x}_2\, \ldots\, \mathbf{x}_n)$, där $\mathbf{x}_i' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}_i$ (dvs $\mathbf{X}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}$) och $\mathbf{A}(t)$ är kontinuerlig i I, är **wronskideterminanten** $W(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n)(t) = \det \mathbf{X}(t)$ **antingen** $= 0$ för alla $t \in I$ **eller** $\neq 0$ för alla $t \in I$. $\{\mathbf{x}_1(t),\ldots,\mathbf{x}_n(t)\}$ är alltså linjärt oberoende för **alla** $t \in I$ om den är det för **något** $t \in I$.

Om $W(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n)(t) \neq 0$ kallas $\{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n\}$ en **fundamentalmängd** lösningar och $\mathbf{\Phi}(t) = (\mathbf{x}_1\, \ldots\, \mathbf{x}_n)$ en **fundamentalmatris** för den homogena ekvationen.

$\underset{n\times n}{\mathbf{\Phi}(t)}$ är en fundamentalmatris för ekvationen precis om $\begin{cases} \mathbf{\Phi}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{\Phi} \\ \det \mathbf{\Phi}(t_0) \neq 0 \end{cases}$

Sats: Om $\mathbf{A}(t)$ är kontinuerlig i I, finns ett sådant $\mathbf{\Phi}$ i I.

Den **allmänna lösningen** till ekvationen $\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t)$ är då $\mathbf{x}_p + \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{c}$, $\mathbf{x}_p$ en (”partikulär–”)lösning, $\underset{n\times 1}{\mathbf{c}}$ godtycklig konstant.

Om $\mathbf{f}(t) \equiv 0$ (dvs ekvationen homogen) kan man ta $\mathbf{x}_p(t) \equiv 0$.

Homogena, autonoma system, dvs $\mathbf{x}' = \mathbf{Ax}$, $\underset{n\times n}{\mathbf{A}}$ konstant:

Om $\mathbf{A}$ har n linjärt oberoende **egenvektorer** $\mathbf{k}_1,\ldots,\mathbf{k}_n$ med $\mathbf{Ak}_i = \lambda_i\mathbf{k}_i$ (speciellt om alla λ_i är olika eller $\mathbf{A}$ är symmetrisk) är den allmänna lösningen

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i t}\mathbf{k}_i, \text{ dvs man kan välja } \mathbf{\Phi}(t) = \left(e^{\lambda_1 t}\mathbf{k}_1 \ldots e^{\lambda_n t}\mathbf{k}_n\right).$$