(Signaler & system I, ht08: L2, on 3 september)

Mer om lösningar till homogena linjära ODE, (ZC4.1)

Ekvationen skrivs åter $L(y) = 0$, där $L = a_n(x)D^n + \ldots + a_1(x)D + a_0(x)$. Vi antar fortfarande att $a_n(x), \ldots, a_1(x), a_0(x), g(x)$ är **definierade och kontinuerliga** i ett **intervall** $\boldsymbol{I}$ och $\boldsymbol{a_n(x) \neq 0}$ för alla $x \in I$.

En **fundamentalmängd lösningar** till $L(y) = 0$ är en mängd $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ av n stycken linjärt oberoende lösningar.

Sats: $L(y) = 0$ har en fundamentalmängd lösningar.

Sats: Om $\{y_1, \ldots, y_n\}$ är en fundamentalmängd lösningar till $L(y) = 0$, kan varje lösning skrivas $y = c_1y_1 + \ldots + c_ny_n$ (allmänna lösningen).
Fundamentalmängden är alltså en **bas** för lösningarna.

Om inhomogena ekvationer

Sats: Allmänna lösningen till $L(y) = g$ är $\boldsymbol{y = y_h + y_p}$, där
y_h är allmänna lösningen till den homogena ekvationen $L(y) = 0$ och
y_p är **en** lösning till $L(y) = g$ (en "partikulärlösning").

Sats: Om $L(y_{p_i}) = g_i$ och $y_p = c_1y_{p_1} + \ldots + c_ky_{p_k}$ så är $L(y_p) = c_1g_1 + \ldots + c_kg_k$.

Fallet med konstanta koefficienter, (ZC4.3, 4.4)

Vi repeterade (från tidigare kurser) hur funktionerna i en fundamentalmängd lösningar till $p(D)y = 0$ svarar mot nollställena till polynomet $p(m)$ och hur vi sedan kunde finna partikulärlösningar till den inhomogena ekvationen $p(D)y = g$ med **ansats** om g är en summa av produkter av polynom och funktioner $e^{\alpha x}$, $\cos\beta x$, $\sin\beta x$. Se boken!

Den väsentliga skillnaden mot det allmänna fallet med icke-konstanta koefficienter är att vi här har en enkel metod att finna lösningarna i en fundamentalmängd (med det karakteristiska polynomet).

Variation av parametrar, (ZC4.6)

Låt $\{y_1(x), \ldots, y_n(x)\}$ vara en **fundamentalmängd lösningar** till den **homogena** ekvationen $\boldsymbol{L(y) = y^{(n)} + P_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + P_0(x)y = 0}$, där $P_{n-1}, \ldots, P_0(x), f(x)$ är kontinuerliga i intervallet I (standardform).
För varje n ggr deriverbar funktion $y(x)$ finns entydiga $u_1(x), \ldots, u_n(x)$ så att

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} = u_1(x) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1' \\ \vdots \\ y_1^{(n-1)} \end{pmatrix} + \ldots + u_n(x) \begin{pmatrix} y_n \\ y_n' \\ \vdots \\ y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

$u_1(x), \ldots, u_n(x)$ är deriverbara och $\boldsymbol{L(y) = f(x)}$ om och endast om

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{y_1} & \boldsymbol{y_2} & \cdots & \boldsymbol{y_n} \\ \boldsymbol{y_1'} & \boldsymbol{y_2'} & \cdots & \boldsymbol{y_n'} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{y_1^{(n-1)}} & \boldsymbol{y_2^{(n-1)}} & \cdots & \boldsymbol{y_n^{(n-1)}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{u_1'} \\ \boldsymbol{u_2'} \\ \vdots \\ \boldsymbol{u_n'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \boldsymbol{f} \end{pmatrix},$$

ett **linjärt ekvationssystem** med **entydigt bestämda** $u_1'(x), \ldots, u_n'(x)$. Integration av dem ger $u_1(x), \ldots, u_n(x)$ och lösningen till $L(y) = f(x)$:

$$\boldsymbol{y(x) = u_1(x)y_1(x) + \ldots + u_n(x)y_n(x)}.$$