(Signaler & system I, ht08: L1, må 1 september)

Om första ordningens linjära ODE, (ZC2.3)

Vi söker alla funktioner $y(x)$ som uppfyller $\boldsymbol{a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)}$,
där $a_1(x)$, $a_0(x)$, $g(x)$ är givna funktioner.
Lösningsmetod:
1. Dividera med $a_1(x)$. Det ger $\boldsymbol{y' + P(x)y = f(x)}$ (standardform).
2. Finn den **integrerande faktorn** $\boldsymbol{e^{\int P(x)\,dx}}$.
3. Multiplicera med den, så blir ekvationen $(e^{\int P(x)\,dx}y)' = e^{\int P(x)\,dx}f(x)$.
4. Integrera båda leden. Det ger $\boldsymbol{y(x) = e^{-\int P(x)\,dx}\int e^{\int P(x)\,dx}f(x)\,dx.}$
   En **explicit** lösning (om man kan lösa integralerna).

Om n:e ordningens linjära ODE, (ZC4.1)

En linjär ODE kan skrivas $\boldsymbol{L(y) = 0}$ (homogen ekvation) eller $\boldsymbol{L(y) = g(x)}$ (inhomogen), där **differentialoperatorn** L ges av

$$L = a_n(x)D^n + \cdots + a_1(x)D + a_0(x).$$

Vi antar här att $a_n(x), \ldots, a_1(x), a_0(x), g(x)$ är **definierade och kontinuerliga** i ett **intervall** $\boldsymbol{I}$ och $\boldsymbol{a_n(x) \neq 0}$ för alla $x \in I$.

L är en **linjär** operator, dvs $L(c_1f_1 + c_2f_2) = c_1L(f_1) + c_2L(f_2)$ för alla konstanter $c_{1,2}$ och alla (n ggr deriverbara) funktioner $f_{1,2}$. Det ger

Superpositionsprincipen (för linjära, homogena ODE):
Om $y_1, y_2, \ldots, y_k$ uppfyller $L(y) = 0$, så gör $y = c_1y_1 + \cdots + c_ky_k$ också det.

Sats: (Global och entydig lösbarhet för linjära ODE)
Begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} L(y) = g(x) \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

har för $x_0 \in I$ och $y_0, \ldots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$ (eller $\mathbb{C}$) en **entydig lösning** $y(x)$ i **hela intervallet** I (minns antagandena om $a_n(x), \ldots, a_1(x), a_0(x), g(x)$ ovan).

Wronskideterminanten av funktionerna $f_1, \ldots, f_n$:

$$W(f_1, \ldots, f_n)(x) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Det gäller att $f_1, \ldots, f_n$ linjärt beroende $\Rightarrow$ $W(f_1, \ldots, f_n)(x) = 0$, alla $x \in I$

Sats: Om $y_1, \ldots, y_n$ är lösningar till $L(y) = 0$ i I gäller
$y_1, \ldots, y_n$ är **linjärt oberoende** $\Leftrightarrow$ $W(y_1, \ldots, y_n)(x) \neq 0$, **alla** $x \in I$
$y_1, \ldots, y_n$ är **linjärt beroende** $\Leftrightarrow$ $W(y_1, \ldots, y_n)(x) = 0$, **alla** $x \in I$

Reduktion av ordningen, (ZC4.2)

Om man **känner en lösning** till en homogen linjär ODE $\boldsymbol{L(y) = 0}$, fås alla lösningar genom att lösa en ekvation av lägre ordning (och integrera en gång).

Om $L(y_1) = 0$, skriv $y(x) = u(x)y_1(x)$. Då får man $\boldsymbol{L(y) = 0 \Leftrightarrow L_1(u) = 0}$,
där $\boldsymbol{L_1 = b_n(x)D^n + \cdots + b_1(x)D}$.
u' uppfyller alltså en linjär, homogen ODE av ordning $n - 1$.