KTH Matematik
B.Ek

Lösningsförslag ks2, Signaler och system I, 8 oktober 2008

A1a) Bestäm fouriertransformen $X(\omega)$ av

$$x(t) = \frac{e^{2it}}{t^2+2t+10}.$$

b) Finn en generaliserad funktion $y(t)$ som har fouriertransformen

$$Y(\omega) = \frac{\omega^2}{\omega^2+4}.$$

Lösning:

a) Enligt den bifogade tabellen(NV) gäller $\frac{1}{t^2+3^2} \xrightarrow{\mathcal{FT}} \frac{\pi}{3}e^{-3|\omega|}$, så (med en formel från tabellen(NO)) $\frac{1}{t^2+2t+10} = \frac{1}{(t+1)^2+3^2} \xrightarrow{\mathcal{FT}} \frac{\pi}{3}e^{i\omega}e^{-3|\omega|}$ och (med en annan formel) $x(t) = \frac{e^{2it}}{t^2+2t+10} \xrightarrow{\mathcal{FT}} \frac{\pi}{3}e^{i(\omega-2)}e^{-3|\omega-2|}$, så

Svar a): $\boldsymbol{X(\omega) = \frac{\pi}{3}e^{i(\omega-2)}e^{-3|\omega-2|}}$.

b) Enklast: $Y(\omega) = \frac{\omega^2}{\omega^2+4} = 1 - \frac{4}{\omega^2+4} = 1 - \frac{2\cdot 2}{2^2+\omega^2}$, så (tabellen(NV))
$y(t) = \delta(t) - e^{-2|t|}$.
Annars: (Enligt tabellen(NV)) $e^{-2|t|} \xrightarrow{\mathcal{FT}} \frac{4}{\omega^2+4}$, så (tabellen(NO))
$-\frac{1}{4}\frac{d^2}{dt^2}e^{-2|t|} \xrightarrow{\mathcal{FT}} \frac{\omega^2}{\omega^2+4}$. Det ger samma svar,

Svar b): $\boldsymbol{y(t) = \delta(t) - e^{-2|t|}}$.

B1a) Bestäm fouriertransformen $X(\omega)$ av

$$x(t) = \frac{e^{3it}}{t^2+2t+5}.$$

b) Finn en generaliserad funktion $y(t)$ som har fouriertransformen

$$Y(\omega) = \frac{\omega^2}{\omega^2+9}.$$

Lösning:

a) Enligt den bifogade tabellen(NV) gäller $\frac{1}{t^2+2^2} \xrightarrow{\mathcal{FT}} \frac{\pi}{2}e^{-2|\omega|}$, så (med en formel från tabellen(NO)) $\frac{1}{t^2+2t+5} = \frac{1}{(t+1)^2+2^2} \xrightarrow{\mathcal{FT}} \frac{\pi}{2}e^{i\omega}e^{-2|\omega|}$ och (med en annan formel) $x(t) = \frac{e^{3it}}{t^2+2t+5} \xrightarrow{\mathcal{FT}} \frac{\pi}{2}e^{i(\omega-3)}e^{-2|\omega-3|}$, så

Svar a): $\boldsymbol{X(\omega) = \frac{\pi}{2}e^{i(\omega-3)}e^{-2|\omega-3|}}$.

b) Enklast: $Y(\omega) = \frac{\omega^2}{\omega^2+9} = 1 - \frac{9}{\omega^2+9} = 1 - \frac{3}{2}\frac{2\cdot 3}{3^2+\omega^2}$, så (tabellen(NV))
$y(t) = \delta(t) - \frac{3}{2}e^{-3|t|}$.
Annars: (Enligt tabellen(NV)) $e^{-3|t|} \xrightarrow{\mathcal{FT}} \frac{6}{\omega^2+9}$, så (tabellen(NO))
$-\frac{1}{6}\frac{d^2}{dt^2}e^{-3|t|} \xrightarrow{\mathcal{FT}} \frac{\omega^2}{\omega^2+9}$. Det ger samma svar,

Svar b): $\boldsymbol{y(t) = \delta(t) - \frac{3}{2}e^{-3|t|}}$.

A2) Vi betraktar begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y'' - y' - 2y = 2e^t \\ y(0) = 3,\ y'(0) = 1 \end{cases}.$$

a) Bestäm laplacetransformen $Y(s)$ av lösningen $y(t)$ till problemet.
b) Använd $Y(s)$ för att bestämma $y(t)$.

Lösning:
a) Laplacetransformation av ekvationen ger (tabell(SO,SV)) $s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - (sY(s) - y(0)) - 2Y(s) = \frac{2}{s-1}$, dvs, med de givna begynnelsevärdena, $s^2Y(s) - 3s - 1 - (sY(s) - 3) - 2Y(s) = \frac{2}{s-1}$, så $(s^2 - s - 2)Y(s) = (s-2)(s+1)Y(s) = 3s - 2 + \frac{2}{s-1}$, så
Svar a): $\boldsymbol{Y(s) = \frac{3s-2}{(s-2)(s+1)} + \frac{2}{(s-2)(s-1)(s+1)}}$**.**
b) Partialbråksuppdelning av $Y(s)$ ger (med handpåläggning, identifikation av koefficienter e.dyl.) $Y(s) = \frac{\frac{4}{3}}{s-2} + \frac{\frac{5}{3}}{s+1} + \frac{\frac{2}{3}}{s-2} + \frac{-1}{s-1} + \frac{\frac{1}{3}}{s+1} = \frac{2}{s-2} - \frac{1}{s-1} + \frac{2}{s+1}$, så $y(t) = 2e^{2t} - e^t + 2e^{-t}$,
Svar b): $\boldsymbol{y(t) = 2e^{2t} - e^t + 2e^{-t}}$**.**

B2) Vi betraktar begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y'' + y' - 2y = 2e^{-t} \\ y(0) = -1,\ y'(0) = 4 \end{cases}.$$

a) Bestäm laplacetransformen $Y(s)$ av lösningen $y(t)$ till problemet.
b) Använd $Y(s)$ för att bestämma $y(t)$.

Lösning:
a) Laplacetransformation av ekvationen ger (tabell(SO,SV)) $s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + sY(s) - y(0) - 2Y(s) = \frac{2}{s+1}$, dvs, med de givna begynnelsevärdena, $s^2Y(s) + s - 4 + sY(s) + 1 - 2Y(s) = \frac{2}{s+1}$, så $(s^2 + s - 2)Y(s) = (s-1)(s+2)Y(s) = -s + 3 + \frac{2}{s+1}$, så
Svar a): $\boldsymbol{Y(s) = \frac{-s+3}{(s-1)(s+2)} + \frac{2}{(s-1)(s+1)(s+2)}}$**.**
b) Partialbråksuppdelning av $Y(s)$ ger (med handpåläggning, identifikation av koefficienter e.dyl.) $Y(s) = \frac{\frac{2}{3}}{s-1} + \frac{-\frac{5}{3}}{s+2} + \frac{\frac{1}{3}}{s-1} + \frac{-1}{s+1} + \frac{\frac{2}{3}}{s+2} = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$, så $y(t) = e^t - e^{-t} - e^{-2t}$,
Svar b): $\boldsymbol{y(t) = e^t - e^{-t} - e^{-2t}}$**.**