KTH Matematik
B.Ek

Lösningsförslag ks1, Signaler och system I, 11 september 2008

A1) Verifiera att differentialekvationen

$$x^2y'' - (3x^2 + 4x)y' + 6(x + 1)y = 0, \quad x > 0$$

har en lösning $y_1(x) = x^2$ och använd den för att finna den allmänna lösningen till ekvationen.

Lösning: Enligt metoden "reduktion av ordningen" skriver vi lösningen $y(x)$ som $u(x)y_1(x) = x^2u(x)$.
Då fås $y' = x^2u' + 2xu$ och $y'' = x^2u'' + 4xu' + 2u$, så insättning i ekvationen ger $x^2(x^2u'' + 4xu' + 2u) - (3x^2 + 4x)(x^2u' + 2xu) + 6(x + 1)x^2u = 0$,
dvs $x^4u'' + (4x^3 - 3x^4 - 4x^3)u' + (2x^2 - 6x^3 - 8x^2 + 6x^3 + 6x^2)u = 0$, dvs $x^4u'' - 3x^4u' = 0$, så (då $x > 0$) $u'' - 3u' = 0$ och (med $v = u'$) $v' - 3v = 0$, med allmän lösning $v(x) = Ce^{3x} = u'$, så $u(x) = c_1 + c_2e^{3x}$. $y(x) = x^2u(x)$ ger
Svar: $\boldsymbol{y(x) = c_1x^2 + c_2x^2e^{3x}}$, $\boldsymbol{c_1, c_2}$ **godtyckliga konstanter.**
Valet $c_1 = 1$, $c_2 = 0$ ger att $y_1(x) = x^2$ verkligen är en lösning till ekvationen, vilket förstås enklare kunde ha verifierats direkt.

B1) Verifiera att differentialekvationen

$$x^2y'' - (2x^2 + 6x)y' + 6(x + 2)y = 0, \quad x > 0$$

har en lösning $y_1(x) = x^3$ och använd den för att finna den allmänna lösningen till ekvationen.

Lösning: Enligt metoden "reduktion av ordningen" skriver vi lösningen $y(x)$ som $u(x)y_1(x) = x^3u(x)$.
Då fås $y' = x^3u' + 3x^2u$ och $y'' = x^3u'' + 6x^2u' + 6xu$, så insättning i ekvationen ger $x^2(x^3u'' + 6x^2u' + 6xu) - (2x^2 + 6x)(x^3u' + 3x^2u) + 6(x + 2)x^3u = 0$,
dvs $x^5u'' + (6x^4 - 2x^5 - 6x^4)u' + (6x^3 - 6x^4 - 18x^3 + 6x^4 + 12x^3)u = 0$, dvs $x^5u'' - 2x^5u' = 0$, så (då $x > 0$) $u'' - 2u' = 0$ och (med $v = u'$) $v' - 2v = 0$, med allmän lösning $v(x) = Ce^{2x} = u'$, så $u(x) = c_1 + c_2e^{2x}$. $y(x) = x^3u(x)$ ger
Svar: $\boldsymbol{y(x) = c_1x^3 + c_2x^3e^{2x}}$, $\boldsymbol{c_1, c_2}$ **godtyckliga konstanter.**
Valet $c_1 = 1$, $c_2 = 0$ ger att $y_1(x) = x^3$ verkligen är en lösning till ekvationen, vilket förstås enklare kunde ha verifierats direkt.

A2) Bestäm den allmänna lösningen $\mathbf{x}(t)$ till systemet

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x},$$

där $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{x}' = \frac{d}{dt}\mathbf{x}$.

Lösning: Först bestämmer vi $\mathbf{A}$:s egenvärden och egenvektorer.
Karakteristiska ekvationen blir $0 = \det(\mathbf{A} - \lambda I) = \left|\begin{smallmatrix} -4-\lambda & 6 \\ -3 & 5-\lambda \end{smallmatrix}\right| = (-4-\lambda)(5-\lambda) - (-3)\cdot 6 = \lambda^2 - \lambda - 2$, med lösningar $\lambda_{1,2} = 2, -1$.
Motsvarande egenvektorer fås som lösningar till $(\mathbf{A} - \lambda I)\mathbf{k} = \mathbf{0}$, dvs
för $\lambda_1 = 2$: $\left(\begin{smallmatrix} -6 & 6 \\ -3 & 3 \end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, vi kan välja egenvektorn $\mathbf{k}_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$,
för $\lambda_2 = -1$: $\left(\begin{smallmatrix} -3 & 6 \\ -3 & 6 \end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{smallmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, vi kan välja egenvektorn $\mathbf{k}_2 = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.
Den allmänna lösningen till ekvationen ges av $\mathbf{x}(t) = \sum_i c_i \mathbf{k}_i e^{\lambda_i t}$, så
Svar: Den allmänna lösningen är
$\boldsymbol{\mathbf{x}(t) = c_1 \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) e^{2t} + c_2 \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) e^{-t}, \quad c_1, c_2}$ **godtyckliga konstanter.**

B2) Bestäm den allmänna lösningen $\mathbf{x}(t)$ till systemet

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x},$$

där $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{x}' = \frac{d}{dt}\mathbf{x}$.

Lösning: Först bestämmer vi $\mathbf{A}$:s egenvärden och egenvektorer.
Karakteristiska ekvationen blir $0 = \det(\mathbf{A} - \lambda I) = \left|\begin{smallmatrix} -5-\lambda & 3 \\ -6 & 4-\lambda \end{smallmatrix}\right| = (-5-\lambda)(4-\lambda) - (-6)\cdot 3 = \lambda^2 + \lambda - 2$, med lösningar $\lambda_{1,2} = 1, -2$.
Motsvarande egenvektorer fås som lösningar till $(\mathbf{A} - \lambda I)\mathbf{k} = \mathbf{0}$, dvs
för $\lambda_1 = 1$: $\left(\begin{smallmatrix} -6 & 3 \\ -6 & 3 \end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{smallmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, vi kan välja egenvektorn $\mathbf{k}_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$,
för $\lambda_2 = -2$: $\left(\begin{smallmatrix} -3 & 3 \\ -6 & 6 \end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, vi kan välja egenvektorn $\mathbf{k}_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.
Den allmänna lösningen till ekvationen ges av $\mathbf{x}(t) = \sum_i c_i \mathbf{k}_i e^{\lambda_i t}$, så
Svar: Den allmänna lösningen är
$\boldsymbol{\mathbf{x}(t) = c_1 \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) e^{t} + c_2 \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) e^{-2t}, \quad c_1, c_2}$ **godtyckliga konstanter.**