Institutionen för matematik
KTH, B Ek

Lösningar tentamen 5B1115 Matematik 1 för Bio1, K1, m.fl. 24 oktober 2003

1. Låt $p(z) = z^4+2z^3+4z^2+36z+20$. Vi vet att $p(1-3i) = 0$ och söker alla p:s nollsatällen. Eftersom p är ett reellt polynom (dvs koefficienterna är reella) är $p(1+3i) = p(\overline{1-3i}) = \overline{p(1-3i)} = \overline{0} = 0$, så enligt faktorsatsen är $p(z)$ delbart med $(z-(1-3i))(z-(1+3i)) = z^2-2z+10$. Polynomdivision ger $p(z) = (z^2-2z+10)(z^2+4z+2)$, så p:s övriga nollställen är nollställena till z^2+4z+2, dvs $z = -2 \pm \sqrt{2}$.
Svar: Ekvationens rötter är $\mathbf{1+3i, 1-3i, -2+\sqrt{2}, -2-\sqrt{2}}$.

2. Omkring punkten $(1,1)$ kan kurvan beskrivas av en funktion $y = y(x)$. Deriveras den givna ekvationen $\arctan(xy) = \frac{\pi}{4}\, e^{x-y}$ implicit, fås $\frac{1}{1+(xy)^2}\,(y+xy') = \frac{\pi}{4}\, e^{x-y}\,(1-y')$. Sätt in $x = y = 1$, så fås för y' i punkten $(1,1)$: $\frac{1}{2}(1+y') = \frac{\pi}{4}\,(1-y')$ och därur $y'_{(1,1)} = \frac{\pi-2}{\pi+2}$. Ekvationen för en rät linje genom punkten (x_0, y_0) och med riktningskoefficient k ges av $y - y_0 = k\,(x-x_0)$, så
Svar: Tangentens ekvation är $\mathbf{y-1 = \frac{\pi-2}{\pi+2}\,(x-1)}$.

3. Eftersom integrandens täljare har lägre grad än nämnaren kan vi dela upp i partialbråk: $\frac{x^2+6x+1}{x^3-x} = \frac{x^2+6x+1}{(x+1)\,x\,(x-1)} = \frac{A}{x+1}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x-1}$. A, B, C fås med handpåläggning (eller t.ex. genom att multiplicera båda leden med nämnaren och identifiera koefficienter) till $A = -2, B = -1, C = 4$. Integralen blir:
$\int_2^3 \frac{x^2+6x+1}{x^3-x}\,dx = \int_2^3 (\frac{-2}{x+1}+\frac{-1}{x}+\frac{4}{x-1})\,dx = [-2\ln|x+1| - \ln|x| + 4\ln|x-1|]_2^3 = -2\ln 4 - \ln 3 + 4\ln 2 - (-2\ln 3 - \ln 2 + 4\ln 1) = \ln 2 + \ln 3 = \ln 6$.
Svar: Integralens värde är $\ln \mathbf{6}$.

4. För fixt x blir tvärsnittet av kroppen en cirkel med radie $r(x) = e^{\cos x}\sqrt{\sin x}$ och area $\pi r(x)^2 = \pi e^{2\cos x}\sin x$, så den sökta volymen: $\pi\int_0^\pi e^{2\cos x}\sin x\,dx =$

$$\left[\begin{array}{ll} t = \cos x & \begin{array}{c|c} x & t \\ \hline \pi & -1 \\ 0 & 1 \end{array} \\ dt = -\sin x\,dx & \end{array}\right] = \pi\int_1^{-1} e^{2t}(-1)\,dt = \pi\int_{-1}^{1} e^{2t}\,dt = \pi\left[\tfrac{1}{2}e^{2t}\right]_{-1}^{1} = \tfrac{\pi}{2}\,(e^2 - e^{-2}).$$

Svar: Kroppens volym är $\mathbf{\frac{\pi}{2}\,(e^2-e^{-2})}$ $(=\pi\sinh 2)$ v.e.

5. Låt $f(x) = x((\ln x)^3 - 3(\ln x)^2 + 6\ln x) - 6(x-1) = x((\ln x)^3 - 3(\ln x)^2 + 6\ln x - 6) + 6$. Det gäller att visa att $f(x) \geq 0$ för alla $x > 0$.
Derivering (med produktregeln och kedjeregeln) ger $f'(x) = ((\ln x)^3 - 3(\ln x)^2 + 6\ln x - 6) + x(3(\ln x)^2 - 3\cdot 2\ln x + 6)\frac{1}{x} + 0 = (\ln x)^3$. Eftersom $f(1) = 0$ och $(\ln x)^3 < 0$ då $0 < x < 1$ och $(\ln x)^3 > 0$ då $x > 1$ får vi tabellen

x	0		1	
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$

och läser av att $f(x) \geq 0$ för alla $x > 0$. **Saken är därmed klar.**

6. Vi har de kända ML-utvecklingarna
$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^5)$, $\quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^4)$, $\quad e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \mathcal{O}(t^3)$, så
$\sin x\ln(1+x) = (x - \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^5))(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^4)) = x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} + \mathcal{O}(x^5)$,
$x^2 e^{-\frac{x}{2}} = x^2(1 - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}(-\frac{x}{2})^2 + \mathcal{O}(x^3)) = x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{8} + \mathcal{O}(x^5)$ och därmed
$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x\ln(1+x) - x^2 e^{-\frac{x}{2}}}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} + \mathcal{O}(x^5) - (x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{8} + \mathcal{O}(x^5))}{x^4} =$
$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^4}{24} + \mathcal{O}(x^5)}{x^4} = \lim_{x\to 0}(\frac{1}{24} + \mathcal{O}(x)) = \frac{1}{24}$.
Svar: Gränsvärdet är $\mathbf{\frac{1}{24}}$.

7. Vi söker den allmänna lösningen till ekvationen $y'' + 2y' + 5y = (x^2 + 1)\, e^{-x}$.
1) Finn först y_h, den allmänna lösningen till den **homogena** ekvationen.
Karakteristiska ekvationen $r^2 + 2r + 5 = 0$ har de enkla rötterna $r_{1,2} = -1 \pm 2i$, så $y_h(x) = (A\cos 2x + B\sin 2x)e^{-x}$, A, B godtyckliga konstanter.
2) För att finna en partikulärlösning y_p, inför $z(x)$ enligt $y(x) = z(x)e^{-x}$. Förskjutningsregeln (eller direkt beräkning av $y' = (z' - z)e^{-x}, y'' = (z'' - 2z' + z)e^{-x}$ och insättning) ger $y'' + 2y' + 5y = (D^2 + 2D + 5)y = (D^2 + 2D + 5)(ze^{-x}) = e^{-x}((D - 1)^2 + 2(D - 1) + 5)z = e^{-x}(D^2 + 4)z = (z'' + 4z)e^{-x}$.
Ekvationen blir alltså $z'' + 4z = x^2 + 1$. För att finna en partikulärlösning z_p ansätter vi $z(x) = ax^2 + bx + c$ och sätter in. Det ger $2a + 4(ax^2 + bx + c) = x^2 + 1$, så ansatsen ger en lösning om $4a = 1, 4b = 0, 2a + 4c = 1$, dvs $a = \frac{1}{4}, b = 0, c = \frac{1}{8}$. Vi får alltså $z_p(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}$.
Den allmänna lösningen ges av $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$, så
Svar: Lösningen är $\mathbf{y(x) = (\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8} + A\cos 2x + B\sin 2x)e^{-x}}$, A, B godtyckliga.

8. Låt P_n vara påståendet $(1 - \frac{1}{2^2})(1 - \frac{1}{3^2})\dots(1 - \frac{1}{n^2}) = \frac{n+1}{2n}$. Vi skall visa att P_n är sann för $n = 2, 3, \dots$.
Vi ger ett induktionsbevis:
Bas: $\mathrm{VL}_2 = 1 - \frac{1}{2^2} = \frac{3}{4}$ och $\mathrm{HL}_2 = \frac{2+1}{2\cdot 2} = \frac{3}{4}$, så vi har visat P_2.
Steg: Antag att P_k är sann. Då fås
$\mathrm{VL}_{k+1} = (1 - \frac{1}{2^2})(1 - \frac{1}{3^2})\dots(1 - \frac{1}{(k+1)^2}) = \mathrm{VL}_k \cdot (1 - \frac{1}{(k+1)^2}) \overset{P_k \text{ enl. ant.}}{=} \mathrm{HL}_k \cdot (1 - \frac{1}{(k+1)^2}) = \frac{k+1}{2k} \cdot (1 - \frac{1}{(k+1)^2}) = \frac{(k+1)((k+1)^2-1)}{2k(k+1)^2} = \frac{(k+1)k(k+2)}{2k(k+1)^2} = \frac{k+2}{2(k+1)} = \frac{(k+1)+1}{2(k+1)} = \mathrm{HL}_{k+1}$.
Vi har alltså visat att $P_k \Rightarrow P_{k+1}$ (för $k = 2, 3, \dots$).
Enligt induktionsprincipen följer att P_n är sann för $n = 2, 3, \dots$. **Saken är klar**.
(Man kan också notera att $1 - \frac{1}{k^2} = \frac{k^2-1}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k^2}$ och att $\frac{k-1}{k}$ här förkortas bort mot $\frac{(k-1)+1}{k-1}$ i faktorn före. Kvar blir bara $\frac{1}{2}$ från första faktorn och $\frac{n+1}{n}$ från den sista.)

9. Funktionen $g(x) = x\, \ln x\, (\ln(\ln x))^2$ är positiv och växande för $x \geq 3$ (sammansättning av växande funktioner ger växande funktioner och en produkt av positiva, växande funktioner är positiv och växande). Alltså är $f(x) = \frac{1}{x\, \ln x\, (\ln(\ln x))^2} = \frac{1}{g(x)}$ positiv och avtagande, så integralkriteriet kan tillämpas. Det innebär att

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\, \ln n\, (\ln(\ln n))^2} \text{ är konv.} \iff \int_3^{\infty} \frac{1}{x\, \ln x\, (\ln(\ln x))^2}\, dx \text{ är konv.}$$

Men substitutionen $t = \ln(\ln x)), dt = \frac{1}{\ln x}\frac{1}{x}dx$ ger att integralen är $\int_{\ln(\ln 3)}^{\infty} \frac{dt}{t^2}$, en konvergent integral. Så
Svar: Serien är konvergent.

10a. Vi har att $f(x) = \mathcal{O}(x^2)$ och $f(0) = 0$ (ty $f(x)$ är kontinuerlig kring $x = 0$), så

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\mathcal{O}(x^2)}{x} = \lim_{x\to 0} \mathcal{O}(x) = 0,$$

dvs $f'(0)$ existerar (och har värdet 0).
b. Då $f(x) = \mathcal{O}(x^3)$ behöver inte $f'(x)$ vara $\mathcal{O}(x^2)$, även om den är kontinuerlig, så vi kan inte tillämpa resultatet i **a.** på $f'(x)$.
Vi ger ett motexempel till påståendet: Låt $f(x) = x^3 \cos\frac{1}{x}$ då $x \neq 0$, $f(0) = 0$. $f(x)$ är då $\mathcal{O}(x^3)$ (ty $|\cos\frac{1}{x}| \leq 1$) och kontinuerlig för alla x (elementärt uttryck då $x \neq 0$ och $f(x) \to 0 = f(0)$ då $x \to 0$). Enligt **a.** är då $f'(0) = 0$ (att $f(x) = \mathcal{O}(x^3)$ medför ju att $f(x) = \mathcal{O}(x^2)$). För $x \neq 0$ finner man $f'(x) = 3x^2\cos\frac{1}{x} - x^3(\sin\frac{1}{x})\frac{-1}{x^2} = x\sin\frac{1}{x} + 3x^2\cos\frac{1}{x}$.
Tydligen är $f'(x)$ kontinuerlig för alla x (den är $\mathcal{O}(x)$ då x går mot 0), men

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0}(\sin\frac{1}{x} + 3x\cos\frac{1}{x}),$$

vilket inte existerar (ty $x = \frac{1}{(2n+\frac{1}{2})\pi}$ ger värdet 1 och $x = \frac{1}{(2n-\frac{1}{2})\pi}$ ger värdet -1 och varje (punkterad) omgivning till $x = 0$ innehåller x av båda slagen). Således existerar inte $f''(0)$, trots att förutsättningarna är uppfyllda.
Svar: a. ja, b. nej.