Institutionen för matematik
KTH
B.Ek

Tentamen i 5B1115, Matematik 1 för Bio, K m.fl.
Fredagen den 24 oktober 2003

Skrivtid: 8.00 – 13.00

Examinator: Bengt Ek, tel 7906951.
Inga hjälpmedel tillåtna.
För att ge full poäng måste lösningarna vara ordentligt motiverade.
Ange vad införda beteckningar som inte är standard står för.
Preliminära betygsgränser (inklusive bonuspoäng) är 16, 22 och 30 poäng för betygen 3, 4 respektive 5.
Ange på skrivningsomslaget hur många bonuspoäng du har.

1. (3p) Ekvationen $z^4 + 2z^3 + 4z^2 + 36z + 20 = 0$ har en rot $z = 1 - 3i$. Finn alla rötter till ekvationen.

2. (3p) En kurva i xy-planet definieras av ekvationen $\arctan(xy) = \frac{\pi}{4}\, e^{x-y}$. Finn ekvationen för tangenten till kurvan i punkten $x = y = 1$.

3. (3p) Beräkna integralen

$$\int_2^3 \frac{x^2 + 6x + 1}{x^3 - x}\, dx.$$

4. (3p) Området $\{\ (x, y) \mid 0 \le x \le \pi, 0 \le y \le e^{\cos x}\sqrt{\sin x}\ \}$ roterar ett varv kring x-axeln. Beräkna volymen av den kropp som bildas.

5. (3p) Visa att $x((\ln x)^3 - 3(\ln x)^2 + 6 \ln x) \ge 6(x - 1)$ för alla $x > 0$.

6. (4p) Bestäm gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x \ln(1 + x) - x^2 e^{-\frac{x}{2}}}{x^4}.$$

7. (4p) Finn den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$y'' + 2y' + 5y = (x^2 + 1)\, e^{-x}.$$

8. (4p) Visa, t.ex. med induktion, att för $n = 2, 3, \ldots$ gäller

$$(1 - \tfrac{1}{2^2})(1 - \tfrac{1}{3^2}) \ldots (1 - \tfrac{1}{n^2}) = \tfrac{n+1}{2n}$$

9. (4p) Avgör om följande serie är konvergent eller divergent:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\ \ln n\ (\ln(\ln n))^2}.$$

(*Ledande fråga: Kan integralkriteriet användas?*)

10. Låt $\delta > 0$. Avgör följande genom att bevisa eller ge motexempel:
a. (2p) Om $f(x)$ är kontinuerlig för $|x| < \delta$ och $f(x) = \mathcal{O}(x^2)$ (då x går mot 0), gäller då säkert att $f'(0)$ existerar?
b. (2p) Om $f'(x)$ är kontinuerlig för $|x| < \delta$ och $f(x) = \mathcal{O}(x^3)$ (då x går mot 0), gäller då säkert att $f''(0)$ existerar?

Lycka till!

Lösningar kommer att läggas ut på kurssidan och på institutionens hemsida.