

Tentamensskrivning, 2004-01-10, kl. 8.00–13.00.

5B1115 5B1135 Matematik I, för Bio, E, I, K, ME, Media och OPEN.

- Inga hjälpmedel tillåtna
- Preliminära gränser för betygen 3, 4 och 5 är 16, 22 respektive 30 poäng inklusive bonuspoäng.
- Varje uppgift skall (om inget annat anges) förses med utförlig lösning och noggranna motiveringar.

1. Bestäm $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(1+x) - \ln 2x}{\ln(2+x) - \ln 3x}$. (3p)

2. Bestäm $\int_0^1 \frac{3x \, dx}{\sqrt{x+1}}$. (3p)

3. Bestäm alla lösningar till differentialekvationen
 $y'' + 8y' + 16y = 2x + 1$. (3p)

4. Bestäm volymen av den rotations kropp som bildas då ytan definierad av
 $0 \leq y \leq 1 + \sin x + \cos x$, $0 \leq x \leq \pi$, roterar omkring x-axeln. (3p)

5. Bestäm $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^3) + x^4 \ln|x|}{\sin x - x}$. (3p)

6. Bestäm ekvationen för tangenten till kurvan $x^2y^3 - x^3y^2 = 12$ i punkten $(-1, 2)$. (4p)

7. Bestäm alla lokala extrempunkter (max eller min) till funktionen
 $f(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 1) \ln(1+x^2) - 4 \arctan x - \frac{x^2}{2} + 4x$. (4p)

8. Visa med valfri metod att $\sum_{k=1}^n \frac{2}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

Bestäm även summan $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k(k+1)(k+2)}$. (4p)

V.g. vänd!

9. Ge exempel på en funktion $f(x)$ så att funktionen $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ får så många av följande egenskaper som möjligt (1p utdelas för varje egenskap):

- $F(2) = 0$
- $F(x) \leq 0, \quad 0 \leq x \leq 2.$
- $F_{min} = F(1) = -2$
- F är ej deriverbar i $x = 1.$

Motiveringar erfordras.

(4p)

10. Avgör om följande generaliserade integral är konvergent eller divergent:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$$

(4p)