KTH Matematik.

Lösningar till tentamen i 5B1115 5B1135 Matematik 1 för Bio, E, K, Media, I, ME och Open 19/8 2004

1. $f(x) = \ln\left(\sqrt{\dfrac{2+x^2}{1+x}}\,\right) = \dfrac{1}{2}\ln(2+x^2) - \dfrac{1}{2}\ln(1+x)$, då $x+1>0$.

$f'(x) = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2x}{2+x^2} - \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{x+1}$.

Alltså $f'(1) = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2} = \underline{\dfrac{1}{12}}$.

2. $V = \pi\displaystyle\int_{-3}^{-1} y^2\,dx = \pi\int_{-3}^{-1}\frac{x^2dx}{x^2+4x+5} = \pi\int_{-3}^{-1}\frac{(x^2+4x+5-4x-5)dx}{x^2+4x+5} =$

$\pi\displaystyle\int_{-3}^{-1}(1-\frac{4x+5}{x^2+4x+5})dx = \pi\int_{-3}^{-1}(1-\frac{2(2x+4)-3}{x^2+4x+5})dx =$

$\pi\displaystyle\int_{-3}^{-1}(1-\frac{2(2x+4)}{x^2+4x+5}+\frac{3}{(x+2)^2+1})\,dx =$

$\pi\Big[x - 2\ln(x^2+4x+5) + 3\arctan(x+2)\Big]_{-3}^{-1} =$

$\pi(-1-2\ln 2+3\arctan 1-(-3-2\ln 2+3\arctan(-1))) =$

$\pi(2+\dfrac{3\pi}{4}-\dfrac{-3\pi}{4}) = \underline{2\pi+\dfrac{3\pi^2}{2}}$.

3. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+e^x}-\sqrt{2+x}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+e^x}-\sqrt{2+x})(\sqrt{1+e^x}+\sqrt{2+x})}{x^2(\sqrt{1+e^x}+\sqrt{2+x})} =$

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1+e^x-(2+x)}{x^2(\sqrt{1+e^x}+\sqrt{2+x})} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x^2(\sqrt{1+e^x}+\sqrt{2+x})} =$

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1+x+x^2/2+O(x^3)-x-1}{x^2(\sqrt{1+e^x}+\sqrt{2+x})} = \lim_{x\to 0}\frac{1/2+O(x)}{\sqrt{1+e^x}+\sqrt{2+x}} =$

$\dfrac{1/2}{\sqrt{2}+\sqrt{2}} = \underline{\dfrac{\sqrt{2}}{8}}$.

4. $(3x^2 + \frac{1}{3x})^{13} = ... + \binom{13}{5}(3x^2)^5 \cdot (\frac{1}{3x})^8 + ... =$

$...+\frac{13!}{5! \cdot 8!} \cdot \frac{3^5 x^{10}}{3^8 x^8} + ... =,,, + \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot x^2}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3^3} + ... = ... + \frac{13 \cdot 11 x^2}{3} + ... =$

$... + \frac{143}{3} x^2 + ...$.

Koefficienten för x^2 är alltså $\underline{\frac{143}{3}}$.

5. Antag att $g(x)$ är deriverbar i $x = a$. Vi skall visa att $g(x)$ är kontinuerlig i $x = a$, dvs. att

$\lim_{x \to a} g(x) = g(a)$ eller ekvivalent

(*) $\lim_{x \to a} (g(x) - g(a)) = 0.$

Utgående från vänsterledet i (*) :

$\lim_{x \to a} (g(x) - g(a)) = \lim_{x \to a} \frac{(g(x) - g(a)) \cdot (x - a)}{(x - a)} =$

$\lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \to a} (x - a) = [$ då g är deriverbar i a $] = g'(a) \cdot 0 = 0.$

VSB.

Funktionen $h(x) = |x|$ är kontinuerlig men inte deriverbar i $x = 0$.

6. Sätt $f(x) = \ln(x + 2) - \ln x + \frac{x}{4}$. $f(x) \geq \ln 2 + \frac{1}{2}$ skall visas.

$f'(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{4} = \frac{4x - 4(x+2) + x(x+2)}{4x(x+2)} = \frac{x^2 + 2x - 8}{4x(x+2)} =$

$\frac{(x+4)(x-2)}{4x(x+2)}$ vilket innebär att

$f'(x) < 0$ då $0 < x < 2$, dvs $f(x)$ är avtagande där.

$f(2) = \ln 4 - \ln 2 + \frac{1}{2} = \ln 2 + \frac{1}{2}$

$f'(x) > 0$ då $2 < x$, dvs $f(x)$ är växande där.

$f(2) = \ln 2 + \frac{1}{2}$ är alltså ett globalt minimum i intervallet $0 < x$, så att

$f(x) \geq \ln 2 + \frac{1}{2}$ där. VSV.

7. $V_1 = \pi \int_0^{\pi/2} (\sin^2 x - (\frac{2x}{\pi})^2)\ dx.$

$V_2 = \pi \int_0^{\pi/2} (\sin x - \frac{2x}{\pi})^2\ dx = \pi \int_0^{\pi/2} (\sin^2 x + (\frac{2x}{\pi})^2 - \frac{4x}{\pi} \sin x)\ dx.$

Man får alltså

$V_1 - V_2 = \pi \int_0^{\pi/2} (-\frac{8x^2}{\pi^2} + \frac{4x}{\pi} \sin x)\ dx =$

$\pi \left[-\frac{8x^3}{3\pi^2} - \frac{4x}{\pi} \cos x \right]_0^{\pi/2} - \pi \int_0^{\pi/2} -\frac{4}{\pi} \cos x\ dx =$

$-\frac{\pi^2}{3} - 0 - (-0 - 0) - \pi \left[-\frac{4}{\pi} \sin x) \right]_0^{\pi/2} =$

$-\frac{\pi^2}{3} + (4 - 0) = \underline{-\frac{\pi^2}{3} + 4} \quad (> 0).$

8. $\int_0^{\infty} \frac{\ln (x+2)\ dx}{\sqrt{x^3 + x}} = \int_0^{\infty} F(x)\ dx$ är generaliserad både i 0 och i ∞.

Nära $x = 0$ kan $F(x)$ jämföras med $G(x) = 1/\sqrt{x}$:

$$\lim_{x \to 0+} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x \to 0+} \frac{\sqrt{x} \ln (x+2)}{\sqrt{x^3 + x}} = \lim_{x \to 0+} \frac{\ln (x+2)}{\sqrt{x^2 + 1}} = \ln 2 \neq 0.$$

För x större än ett visst tal M gäller att $F(x) < H(x) = \frac{x^{1/4}}{x^{3/2}} = \frac{1}{x^{5/4}}$,
då $\ln (x+2) < x^{1/4}$ och $\sqrt{x^3 + x} > x^{3/2}$ gäller för tillräckligt stora tal.
Både $\int_0^M G(x)\ dx$ och $\int_M^{\infty} H(x)\ dx$ är konvergenta :
Exponenten $1/2$ i $G(x) = 1/x^{1/2}$ är < 1 och exponenten $5/4$ i $H(x) = 1/x^{5/4}$ är > 1 .

Därför är den generaliserade integralen $\int_0^{\infty} \frac{\ln (x+2)\ dx}{\sqrt{x^3 + x}}$ konvergent.

9a.$(*)$ $\quad y'' + 2y' - 3y = e^{-x}$ skall lösas.
Homogen lösning:
Karakteristiska ekvationen $r^2 + 2r - 3 = 0, (r+3)(r-1) = 0$ har lösningen $r_1 = -3, r_2 = 1$
varför homogena lösningen blir: $\quad y_H = Ae^{-3x} + Be^{x}$.

Partikulärlösning:
Eftersom exponentialkoefficienten -1 i högerledet inte är en karakteristisk rot, råder inte resonans och man kan därför ansåtta partikulärlösningen $y_P = a \cdot e^{-x}$
Insättning i $(*)$ ger $(y' = -ae^{-x}, y'' = y)$: $\quad (a - 2a - 3a)e^{-x} = e^{-x}$,
$-4ae^{-x} = e^{-x}, \quad a = -1/4$.
En partikulärlösning är alltså $y_P = -\frac{1}{4}e^{-x}$ och allmänna lösningen kan därför skrivas
$\underline{y = Ae^{-3x} + Be^{x} - \frac{1}{4}e^{-x}}$.

9b. Begynnelsevärdet $y(0) = 1$ insatt i allmänna lösningen medför att $1 = A + B - 1/4$. dvs. $A + B = 5/4$.
P.g.a. villkoret att lösningen inte skall gå mot $\pm\infty$ då $x \to \infty$ måste konstanten B få värdet 0. Därför måste A få värdet 5/4 i den sökta lösningen.
Derivering av allmänna lösningen ger: $y' = -3Ae^{-3x} + Be^{x} + \frac{1}{4}e^{-x}$.
Detta ger $y'(0) = -3A + B + 1/4$.
Med de erhållna värdena på A och B får man därför det sökta begynnelsevillkoret:
$y'(0) = -15/4 + 0 + 1/4 = \underline{-7/2}$.

10.

Formeln $P(n) : \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \cos\left(\frac{(2j-1)x}{2}\right) = \frac{\sin nx}{2\sin\frac{x}{2}} \quad (0 < x < 2\pi)\ n = 1, 2, \ldots$.
skall visas. Induktionsbevis kan användas.

$$P(1) : VL = \cos\frac{x}{2}, \qquad HL = \frac{\sin x}{2\sin\frac{x}{2}} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} = \cos\frac{x}{2} \quad \text{Stämmer!}$$

$P(m) => P(m+1)$:

Antag $P(m) : \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \cos\left(\frac{(2j-1)x}{2}\right) = \frac{\sin mx}{2\sin\frac{x}{2}}$

$P(m+1) : \displaystyle\sum_{j=1}^{m+1} \cos\left(\frac{(2j-1)x}{2}\right) = \frac{\sin(m+1)x}{2\sin\frac{x}{2}}$, skall visas.

$$VL(P_{m+1}) : \sum_{j=1}^{m} \cos\left(\frac{(2j-1)x}{2}\right) + \cos\left(\frac{(2m+1)x}{2}\right) = [P(m) \text{ antas }] =$$

$$\frac{\sin mx}{2\sin\frac{x}{2}} + \cos\left(\frac{(2m+1)x}{2}\right) = \frac{\sin mx + 2\sin\dfrac{x}{2}\cos\left(\dfrac{(2m+1)x}{2}\right)}{2\sin\frac{x}{2}} =$$

10. forts.

$$= [\text{ledning: } 2\cos A \sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)\ ] =$$

$$\frac{\sin mx + \sin(m+1)x - \sin mx}{2\sin\frac{x}{2}} = \frac{\sin(m+1)x}{2\sin\frac{x}{2}} = HL(P_{m+1}) \quad \textbf{VSB}.$$