

Tentamensskrivning, 2004-08-19, kl. 8.00–13.00.

5B1115 5B1135 Matematik 1, för Bio, E, K, Media, I, ME och Open.

- Inga hjälpmedel tillåtna
- Preliminära gränser för betygen 3, 4 och 5 är 16, 22 respektive 30 poäng inklusive bonuspoäng
- Varje uppgift skall (om inget annat anges) förses med utförlig lösning och noggranna motiveringar

1. Bestäm $f'(1)$ då $f(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{2+x^2}{1+x}}\right)$ (3p)

2. Bestäm volymen av den rotationskropp som bildas då ytan definierad av $0 \leq y \leq \frac{-x}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}}$, $-3 \leq x \leq -1$, roterar omkring x -axeln. (3p)

3. Bestäm $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+e^x} - \sqrt{2+x}}{x^2}$. (3p)

4. Bestäm koefficienten för x^2 i utvecklingen av $(3x^2 + \frac{1}{3x})^{13}$. (3p)

5. Visa att om g är deriverbar i $x = a$, så är g kontinuerlig där. Ge också ett exempel på en funktion som är kontinuerlig men inte deriverbar i en punkt. (3p)

6. Visa att $\ln(x+2) - \ln x + \frac{x}{4} \geq \ln 2 + \frac{1}{2}$ för $x > 0$. (4p)

7. Låt V_1 vara volymen av den kropp som bildas då ytan $\frac{2x}{\pi} \leq y \leq \sin x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ roterar omkring x -axeln.
Låt V_2 vara volymen av den kropp som bildas då ytan $0 \leq y \leq \sin x - \frac{2x}{\pi}$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, roterar omkring x -axeln.
Bestäm $V_1 - V_2$. (4p)

8. Avgör om den generaliserade integralen $\int_0^\infty \frac{\ln(x+2) dx}{\sqrt{x^3+x}}$ är konvergent eller divergent. (4p)

9. a. Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen $y'' + 2y' - 3y = e^{-x}$.
b. Antag att begynnelsevärdet för en lösning är $y(0) = 1$. Bestäm ett begynnelsevärde för derivatan, $y'(0)$, så att motsvarande lösning $y(x)$ inte går mot $+\infty$ eller $-\infty$ då $x \rightarrow \infty$. (4p)

10. Bevisa formeln
$$\sum_{j=1}^n \cos\left(\frac{(2j-1)x}{2}\right) = \frac{\sin nx}{2 \sin \frac{x}{2}} \quad (0 < x < 2\pi) \quad \text{då } n = 1, 2, \dots$$

Ledning:
$$\cos A \sin B = \frac{1}{2}(\sin(A+B) - \sin(A-B)).$$
 (4p)