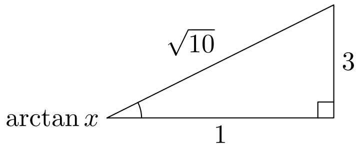
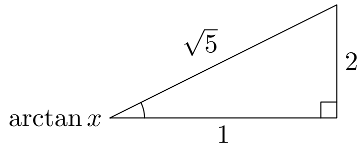
Lösningsförslag, Matematik 1, B, E, IT, ME, Media och I, 2002–10–17.

1. Additionsformeln för sinus ger

$$\sin(\arctan 3 - \arctan 2) = \sin(\arctan 3)\cos(\arctan 2) - \sin(\arctan 2)\cos(\arctan 3).$$





Ur trianglarna avläser vi att

$$\sin(\arctan 3) = \frac{3}{\sqrt{10}}, \quad \cos(\arctan 3) = \frac{1}{\sqrt{10}},$$
$$\sin(\arctan 2) = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \cos(\arctan 2) = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Vi får alltså

$$\sin(\arctan 3 - \arctan 2) = \frac{3}{\sqrt{10}}\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{2}{\sqrt{5}}\frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{1}{5\sqrt{2}}.$$

2. Vi visar påståendet med hjälp av induktion. Eftersom påståndet ska gälla för alla heltal ≥ 1 så börjar vi med att kontrollera påståendet för $n = 1$, som är induktionsbas i det här fallet: $3^2 - 1 = 9 - 1 = 8$, OK. Vi gör sedan induktionsantagandet att påståendet gäller för $n = p$, dvs att 8 delar $3^{2p} - 1$ och ska visa att det då även gäller för $n = p + 1$. Vi har att

$$3^{2(p+1)} - 1 = 3^{2p+2} - 1 = 3^2 3^{2p} - 1 = 3^2(3^{2p} - 1) + 3^2 - 1 = 3^2(3^{2p} - 1) + 8.$$

Enligt induktionsantagandet är den första termen jämnt delbar med 8, så hela uttrycket är jämnt delbart med 8. Enligt induktionsprincipen följer det nu att påståendet är sant för alla $n \geq 1$.

3. Sätt $f(x) = x^2 - x\ln(1+x)$. Vi får $f'(x) = 2x - \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$ och $f''(x) = 2 - \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+x} + \frac{x}{(1+x)^2} = \frac{2x^2+4x+1}{(1+x)^2}$. Då $x \geq 0$ är $f''(x)$ uppenbart ≥ 0. Det medför att derivatan är växande för $x \geq 0$. Men $f'(0) = 0$ så vi får $f'(x) \geq 0$ för $x \geq 0$. Det betyder att även f är växande och då $f(0) = 0$ följer det att $f(x) \geq 0$, dvs $x^2 - x\ln(1+x) \geq 0$ för alla $x \geq 0$.

Man kan också observera att $f(x) = x(x - \ln(1+x))$ och att den första faktorn är ≥ 0 när $x \geq 0$. Frågan, om $f(x) \geq 0$ eller ej, reduceras därför till samma fråga för $x - \ln(1+x)$ som är enklare att räkna.

4. Vi sätter in MacLaurinutvecklingarna för

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} + O(t^6) \qquad \text{och} \qquad \sin t = t - \frac{t^3}{3!} + O(t^5).$$

Det ger

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^4 + 2x^2\cos x - 2\sin(x^2)}{x^6} = \left\{ \text{OBS! vi har satt } t = x^2 \text{ i utvecklingen av sinus} \right\}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^4 + 2x^2\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + O(x^6)\right) - 2x^2 + 2\cdot\frac{1}{3!}x^6 + O(x^{10})}{x^6}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{5}{12}x^6}{x^6} = \frac{5}{12}.$$

5. De primitiva funktionerna till $f(x)$ ges av

$$\int \frac{1}{4x^2-12x+10}\,dx = \int \frac{1}{(2x-3)^2+1}\,dx = \begin{bmatrix} t = 2x-3 \\ dt = 2\,dx \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \tfrac{1}{2}\arctan t + C = \tfrac{1}{2}\arctan(2x-3) + C.$$

En primitiv funktion är så exempelvis $\frac{1}{2}\arctan(2x-3)$.

6. Den homogena ekvationen $y''(x)+2y'(x)+2y(x)=0$ har den karakteristiska ekvationen: $r^2+2r+2=0$, som ger $r=-1\pm i$. Allmänna lösningen till den homogena ekvationen blir därmed $y_h = Ae^{-x}\cos x + Be^{-x}\sin x$. För att få fram en partikulärlösning sätter vi $y_p = z(x)e^{-x}$. Efter insättning i den inhomogena ekvationen får vi en ekvation i z. Förskjutningsregeln ger att den ekvationen har den karakteristiska ekvationen $(r-1)^2+2(r-1)+2=0$, vilket kan förenklas till $r^2+1=0$. Det ger $z''+z=x$ som t.ex. har lösningen $z=x$. Vi får därmed $y_p = xe^{-x}$. Allmänna lösningen: $y = y_h + y_p = e^{-x}(A\cos x + B\sin x + x)$.

7.

$$\int_1^9 \ln(1+\sqrt{x}\,)\,dx = \begin{bmatrix} t = \sqrt{x} \\ dx = 2t\,dt \end{bmatrix} = \int_1^3 \ln(1+t)2t\,dt$$
$$= \Big[\, t^2\ln(1+t)\,\Big]_1^3 - \int_1^3 \frac{t^2}{1+t}\,dt = \Big[\, t^2\ln(1+t)\,\Big]_1^3 - \int_1^3 \Big(\frac{t^2-1}{t+1} + \frac{1}{1+t}\Big)\,dt$$
$$= \Big[\, t^2\ln(1+t)\,\Big]_1^3 - \Big[\, \tfrac{1}{2}t^2 - t + \ln(1+t)\,\Big]_1^3$$
$$= 9\ln 4 - \ln 2 - \tfrac{9}{2} + 3 - \ln 4 + \tfrac{1}{2} - 1 + \ln 2 = 8\ln 4 - 2$$

8. Implicit derivering med avseende på x ger $2y' - \dfrac{y'}{1+y^2} = 3x^2+4$. Löser vi ut y' får vi

$$y' = \frac{(3x^2+4)(1+y^2)}{1+2y^2}.$$

Vi ser att $y' \geq 0$ för alla x så funktionen är växande.

9. Per definition ges $f'(0)$ av

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\dfrac{\ln(1+\Delta x)}{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\dfrac{\Delta x - \frac{1}{2}(\Delta x)^2 + O\big((\Delta x)^3\big)}{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1 - \frac{1}{2}\Delta x + O\big((\Delta x)^2\big) - 1}{\Delta x} = -\frac{1}{2}.$$

10. Om vi betraktar ett infinitesimalt avsnitt av sträckan utgående från punkten x med längd Δx kan vi approximera hastigheten till att vara konstant lika med $\frac{\Delta x}{\Delta t} = 7\sqrt{36+x}$ på det intervallet. Om vi löser ut Δt får vi tiden det tar att åka motsvarande sträckbit, alltså $\Delta t = \frac{\Delta x}{7\sqrt{36+x}}$. Summerar vi och låter avsnitten bli allt kortare ser vi att den totala tiden, T, ges av integralen

$$\int_0^{133} \frac{dx}{7\sqrt{36+x}} = \left[\ \tfrac{2}{7}\sqrt{36+x}\ \right]_0^{133} = \tfrac{26}{7} - \tfrac{12}{7} = 2.$$

Alternativt kan man se att

$$T = \int_0^T dt = \int_0^T \frac{1}{7\sqrt{36+x}} \frac{dx}{dt}\, dt = \int_0^{133} \frac{dx}{7\sqrt{36+x}}.$$