Institutionen för matematik.
KTH

Lösningar till tentamen i Matematik 1, 5B1115, för E, Media och IT onsdagen den 8/1 2003

1.

$$y = x \ln (x^2+1), \qquad y(1) = \ln 2$$

$$y' = \ln (x^2+1) + x \cdot \frac{2x}{x^2+1} = \ln (x^2+1) + 2 - \frac{2}{x^2+1}, \qquad y'(1) = \ln 2 + 1.$$

$$y'' = \frac{2x}{x^2+1} + \frac{2 \cdot 2x}{(x^2+1)^2}, \qquad y''(1) = 1 + 1 = 2.$$

Allmänna Taylorutvecklingen omkring $x = 1$:
$y(x) = y(1) + y'(1)(x-1) + \frac{y''(1)}{2!}(x-1)^2 + R_2$ ger:

$\underline{y(x) = \ln 2 + (1 + \ln 2)(x-1) + (x-1)^2 + R_2}.$

2.

$$y'' - 10y' + 25y = 5 + 6e^x. \qquad \text{Allmänna lösningen söks.}$$

$\mathbf{y_H}$: $\quad L(r) = r^2 - 10r + 25 = (r-5)^2 = 0$ ger $r = 5$, dubbelrot.
Homogena lösningen blir alltså :

$$y_H = (Ax + B)e^{5x}.$$

$\mathbf{y_{P_1}}$: $\quad y_{P_1}$ skall uppfylla $L(D)y_{P_1} = 5$.
Ej resonans ($L(0) \neq 0$). Ansätt $y_{P_1} = a$.
Insättning ger $L(D)a = (D-5) * 2a = 5, \quad 25a = 5, \quad a = y_{P_1} = 1/5.$

$\mathbf{y_{P_2}}$: $\quad y_{P_2}$ skall uppfylla $L(D)y_{P_1} = 6e^x$.
Ej resonans ($L(1) \neq 0$). Ansätt $y_{P_2} = be^x$. $\quad (y'_{P_2} = y''_{P_2} = be^x)$
Insättning ger $L(D)y_{P_2} = y''_{P_2} - 10y'_{P_2} + 25y_{P_2} = 16be^x = 6e^x$,
vilket ger $\quad b = 3/8 \quad$ och $\quad y_{P_2} = \frac{3}{8}e^x$.

Allmänna lösningen, $y = y_H + y_{P_1} + y_{P_2} = \underline{(Ax+B)e^{5x} + 1/5 + 3e^x/8.}$

3.

$$\int \frac{5-x}{2x^2+x-1}\ dx = \frac{1}{2}\int \frac{5-x}{(x-1/2)(x+1)}\ dx =$$

(handpåläggning)

$$\frac{1}{2}\int (\frac{3}{x-1/2} - \frac{4}{x+1})\ dx =$$

$$\underline{\frac{3}{2}\ln|x-\frac{1}{2}| - 2\ln|x+1| + C.}$$

4.

Kurvorna $y = x^2/4$ och $y = \dfrac{8}{4+x^2}$ skär varandra i punkter (x, y) där x uppfyller $\quad x^2/4 = \dfrac{8}{4+x^2}$, vilket ger $x^4 + 4x^2 - 32 = 0$,
$x^2 = -2 \pm \sqrt{4+32}$,

dvs $x^2 = 4$ eller $x^2 = -8$ (slopas) .
$x^2 = 4$ ger $x = \pm 2$.
Området ligger alltså mellan $x = -2$ och $x = 2$.

Det sökta områdets area ges därför av integralen

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-2}^{2} (\frac{8}{4+x^2} - \frac{x^2}{4})dx = \ \text{(symmetri)} \\
&= 2\int_{0}^{2} (\frac{8}{4+x^2} - \frac{x^2}{4})dx = \\
&= 4\int_{0}^{2} \frac{dx}{1+(x/2)^2} - 2\left[\frac{x^3}{12}\right]_0^2 = \\
&= 4\left[2\arctan\frac{x}{2}\right]_0^2 - \frac{1}{6}(8-0) = \\
&= 8(\arctan 1 - 0) - 4/3 = \underline{2\pi - \frac{4}{3}}
\end{aligned}$$

5. $f(x) = 5 - |x-2|, \qquad f(-3) = 5 - |-5| = 0, \quad f(7) = 5 - |5| = 0,$
dvs $f(-3) = f(7) = 0$.
$f(x) = 5 - (x-2) = 7 - x, \quad$ då $x \geq 2$.
$f(x) = 5 - (2-x) = 3 + x, \quad$ då $x \leq 2$.
$f'(2)$ existerar inte eftersom

$$f'_+(2) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{5 - |h| - 5}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{-h}{h} = -1, \quad \text{och}$$

$$f'_-(2) = \lim_{h \to 0-} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0-} \frac{5 - |h| - 5}{h} = \lim_{h \to 0-} \frac{+h}{h} = +1 \neq f'_+(2).$$

Rolles sats säger att $f'(\xi) = 0$ för något ξ i $]a, b[$ om :
1. $f(a) = f(b)$.
2. f är kontinuerlig i $[a, b]$ och
3. f är deriverbar i $]a, b[$.

I exemplet uppfyller f 1. och 2. men inte 3.
Att $f'(x)$ inte är 0 i intervallet innebär därför ingen motsägelse mot Rolles sats.

6.

$$(*) \qquad ye^x + 2xe^y = xy + 1$$

definierar implicit en funktion $y(x)$ i en omgivning av $x = 0$ så att $y(0) = 1$.
Derivera ekvationen $(*)$ med avseende på x:
$y'e^x + ye^x + 2e^y + 2xe^y y' = y + xy'$.
I $x = 0$, där $y = 0 \quad : \qquad y'(0)+1+2e+0 = 1+0$, vilket ger $\quad y'(0) = -2e$.
Tangentens ekvation i $(0, 1)$: $\quad y - 1 = y'(0)(x - 0)$
dvs $\quad \underline{y = -2ex + 1}$.

7. $y = \dfrac{4 + x^2 - x^3}{x^2} = \dfrac{4}{x^2} + 1 - x.$

Asymptoter:

$$\lim_{x \to 0} y = +\infty$$
$$\lim_{x \to \infty} (y - (1 - x)) = 0$$

Detta ger asymptoterna: $\underline{x = 0 \quad \text{och} \quad y = 1 - x.}$

Lokala extrempunkter:

$y' = -\dfrac{8}{x^3} - 1 = 0$, ger $x^3 = -8$, $\quad x = -2$ (enda 0-stället),
$y(-2) = 4.$
$y'' = \dfrac{24}{x^4}$, $\quad y''(-2) = 3/2 > 0.$
Punkten $\underline{(-2, 4)}$ är alltså en $\underline{\text{lokal minpunkt.}}$

8. $A(n):\quad \displaystyle\sum_{j=1}^{n} (j+1)2^{j-1} = n2^n, \quad n = 1, 2, 3, ...$

$A(1):\quad \displaystyle\sum_{j=1}^{1} (j+1)2^{j-1} = 2 \cdot 2^0 = 2 = 1 \cdot 2^1 = 2,$ stämmer.

Antag $A(m):\quad \displaystyle\sum_{j=1}^{m} (j+1)2^{j-1} = m2^m.$

$A(m+1):\quad \displaystyle\sum_{j=1}^{m+1} (j+1)2^{j-1} = (m+1)2^{m+1}$ skall visas.

$VL = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} (j+1)2^{j-1} \quad + \quad (m+2)2^m = (\text{antagandet}) =$

$m2^m + (m+2)2^m = (2m+2)2^m = (m+1)2 \cdot 2^m = (m+1)2^{m+1} = HL$

$A(1)$ och $A(m) \Rightarrow A(m+1)$ är alltså visat.

Alltså gäller $A(n)$ för $n = 1, 2, 3, ...$ VSB

9. För tillräckligt stora x gäller: $\ln x < x^{1/4}$.
Därav följer att (för något $M > 1$) :

$$\int_M^\infty \frac{\ln x \; dx}{x\sqrt{x}+1} < \int_M^\infty \frac{x^{1/4} \; dx}{x\sqrt{x}+1} < \int_M^\infty \frac{x^{1/4} \; dx}{x\sqrt{x}} = \int_M^\infty \frac{dx}{x^{5/4}}$$

som är konvergent eftersom $5/4 > 1$.
Därför är

$\displaystyle\int_M^\infty \frac{\ln x \; dx}{x\sqrt{x}+1}$ konvergent, och därmed också $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln x \; dx}{x\sqrt{x}+1}$ <u>konvergent.</u>

10. Eftersom g är kontinuerlig vet man att
$G(x) = \displaystyle\int_a^x g(t) \; dt$ är en primitiv funktion till $g(x)$.
Enligt integralkalkylens huvudsats är då

$$\int_x^{x^2} g(t) \; dt = G(x^2) - G(x)$$

Man får

$$\frac{d}{dx}\int_x^{x^2} g(t) \; dt = G'(x^2) \cdot 2x - G'(x) = 2xg(x^2) - g(x).$$

VSB.