

Institutionen för matematik.
KTH

Tentamen i Matematik 1, 5B1115, för B, E, IT, ME och Media,
samt Matematik 1, 5B1135, för I,
onsdagen den 9/1 2002 kl. 8.00 - 13.00.

Skrivtid: 08.00 - 13.00

Inga hjälpmedel tillåtna.

För betyg 3 (godkänt), 4 och 5 krävs minst 16, 22, respektive 30 poäng
inklusive bonuspoäng.

Samtliga behandlade uppgifter ska förses med utförlig lösning och motivering.

Lösningförslag finns efter skrivningstidens slut på kurshemsidan.

1. Taylorutveckla $y = x \ln(x^2 + 1)$ omkring $x = 1$ till och med andragradstermen. (3p)
2. Lös differentialekvationen $y'' - 10y' + 25y = 5 + 6e^x$. (3p)
3. Beräkna integralen $\int \frac{5-x}{2x^2+x-1} dx$ (3p)
4. Bestäm arean av det område som definieras av $\frac{x^2}{4} \leq y \leq \frac{8}{x^2+4}$. (3p)
5. Låt $f(x) = 5 - |x - 2|$.
Verifiera att $f(-3) = f(7)$.
I intervallet $[-3, 7]$ är $f'(x)$ inte lika med 0 för något x .
Förklara varför detta inte strider mot Rolles sats. (3p)

6. Bestäm ekvationen för tangenten i punkten $(0, 1)$ till den kurva som definieras av $ye^x + 2xe^y = xy + 1$. (4p)

7. Skissera kurvan $y = \frac{4 + x^2 - x^3}{x^2}$.
Ange eventuella asymptoter och lokala extrempunkter. (4p)

8. Visa med induktionsbevis att

$$\sum_{j=1}^n (j+1)2^{j-1} = n \cdot 2^n \text{ för } n = 1, 2, 3, \dots$$

(4p)

9. Avgör om den generaliserade integralen

$$\int_1^\infty \frac{\ln x \, dx}{x\sqrt{x} + 1}$$

är konvergent eller divergent. (4p)

10. Visa att

$$\frac{d}{dx} \int_x^{x^2} g(t) \, dt = 2xg(x^2) - g(x),$$

om g är kontinuerlig. (4p)