Institutionen för Matematik,
KTH.

Lösningsförslag till tentan i 5B1115 Matematik 1 för B, BIO, E, IT, K, M, ME, Media och T, 03–08–21.

1. Visa att påståendet $P_n\colon 2^n + 3^n < 4^n$ är sant för $n = 2, 3, 4 \ldots$.

   (a) $P_2\colon 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13 < 16 = 4^2$ *är* sant.

   (b) P_n sant $\Longrightarrow P_{n+1}$ sant, ty:

   $$2^{n+1} + 3^{n+1} = 2 \cdot 2^n + 3 \cdot 3^n < 3 \cdot (2^n + 3^n) < \{ \text{ enligt } P_n \}$$
   $$< 3 \cdot 4^n < 4 \cdot 4^n = 4^{n+1}.$$

   (c) Ovanstående plus induktionssatsen $\Longrightarrow P_n$ sant för *alla* heltal ≥ 2.

2. Karakteristiska ekvationen $r^2 - 1 = 0$ ger att $r = \pm 1$, varför $y_{\text{hom}} = A\,e^x + B\,e^{-x}$.

   Ansatsen $y_p = u(x) \cdot e^x$ ger $y_p' = u' \cdot e^x + u \cdot e^x$ och $y_p'' = u'' \cdot e^x + 2u' \cdot e^x + u \cdot e^x$; detta insatt i differentialekvationen ger $e^x \cdot (u'' + 2u' + u - u) = 4x \cdot e^x$ eller $u'' + 2u' = 4x$. Här ansätter vi $u_p' = ax + b$ och får

   $$a + 2ax + 2b = 4x \Longrightarrow a = 2 \text{ och } b = -1,$$

   så att $u_p' = 2x - 1$. Den enklaste funktionen u_p som uppfyller detta är $u_p = x^2 - x$, varför $y_p = (x^2 - x) \cdot e^x$ är en partikulärlösning.

   SVAR: $y = A\,e^x + B\,e^{-x} + (x^2 - x)\,e^x$.

3.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} \arctan \frac{1+x}{1-x} &= \frac{1}{1 + \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} \cdot \frac{1 - x - (1+x) \cdot (-1)}{(1-x)^2} \\
&= \frac{1 - x + 1 + x}{(1-x)^2 + (1+x)^2} = \frac{2}{1 - 2x + x^2 + 1 + 2x + x^2} \\
&= \frac{1}{1 + x^2} \\
&= \frac{d}{dx} \arctan x,
\end{aligned}$$

vilket visar att

$$\arctan\frac{1+x}{1-x} = \arctan x + \text{ konstant} \qquad \text{då } x < 1,$$

eftersom funktionerna är deriverbara för dessa x. Insättning av $x = 0$ (t.ex.) visar sedan att $\pi/4 = 0 +$ konstant, så att konstanten är lika med $\pi/4$.

4. Med handpåläggning får man först att

$$\begin{aligned} f &= \frac{x}{(x+1)(x^2+x+1)} = \frac{-1}{x+1} + \frac{Ax+B}{x^2+x+1} \\ &= \frac{-x^2-x-1+(x+1)(Ax+B)}{(x+1)(x^2+x+1)}, \end{aligned}$$

varefter multiplikation med nämnaren $(x+1)(x^2+x+1)$ visar att

$$\begin{aligned} &x = x^2(A-1) + x(A+B-1) + B - 1 \Longrightarrow A = 1 \text{ och } B = 1 \Longrightarrow \\ &f = \frac{x+1}{x^2+x+1} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}\frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+x+1} - \frac{1}{x+1}. \end{aligned}$$

Här är det bara mittentermen som inte integreras omedelbart:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+x+1} &= \frac{1}{2}\frac{1}{(x+1/2)^2+3/4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{1+4/3\,(x+1/2)^2} \\ &= \frac{2}{3}\frac{1}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{2}{3}\frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{d}{dx}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Med detta ser man att f har den primitiva funktionen

$$F(x) = \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \ln|x+1| + C.$$

5. Taylor säger att

$$f(x) = f(0) + f'(0)\cdot x + \frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2 + \cdots + \frac{f^{(n}(0)}{n!}\cdot x^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot x^{n+1}$$

för något ξ mellan 0 och x. Här gäller:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 2\,(1+x)^{1/2} \Longrightarrow f(0) = 2;\\
f'(x) &= (1+x)^{-1/2} \Longrightarrow f'(0) = 1;\\
f''(x) &= -\frac{1}{2}(1+x)^{-3/2} \Longrightarrow \frac{f''(0)}{2!} = -\frac{1}{4};\\
f'''(x) &= \frac{3}{4}\,(1+x)^{-5/2},
\end{aligned}
$$

så att

$$f(x) = 2\sqrt{1+x} = 2 + x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}\cdot\frac{(1+\xi)^{-5/2}}{3!}\,x^3.$$

Insättning av $x = 1/4$ i detta visar att

$$\sqrt{5} = f(1/4) = 2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{64} + \frac{1}{(1+\xi)^{5/2}}\cdot\frac{1}{512},$$

där ξ är något tal mellan 0 och 1/4, vilket betyder att

$$0 < \frac{1}{(1+\xi)^{5/2}} < 1.$$

Vi ser därmed att

$$2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{64} < \sqrt{5} < 2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{64} + \frac{1}{512},$$

eller, uttryckt på ett annat sätt:

$$(2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{64} + \frac{1}{1024}) - \frac{1}{1024} < \sqrt{5} < (2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{64} + \frac{1}{1024}) + \frac{1}{1024},$$

vilket betyder att

$$\sqrt{5} = 2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{64} + \frac{1}{1024} \pm \frac{1}{1024},$$

där absolutbeloppet av felet är $< 1/1024 < 0,001$.

6. En enkel geometrisk betraktelse visar att $dV = \pi y^2\,dx$, så att här får vi

$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int_0^1 x^2(1-x)\,dx = \pi \int_0^1 (x^2 - x^3)\,dx\\
&= \pi\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \pi\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{12}.
\end{aligned}
$$

7. I integralen
$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{x\sqrt{1-x}}$$
är punkten $x = 0$ elak, varför integralen egentligen är lika med
$$\lim_{\epsilon \to 0+} \int_\epsilon^{1/2} \frac{dx}{x\sqrt{1-x}}.$$
Eftersom integranden är *positiv* följer det att $\int_\epsilon^{1/2} \dots dx$ *växer* då ϵ går mot 0, och det finns då bara två alternativ: antingen blir gränsvärdet *ändligt* (och då är integralen konvergent), eller också *oändligt* (och då är integralen divergent).

Härav följer att det räcker att undersöka huruvida $\int_\epsilon^{1/2}$ är begränsad eller inte.

Då $0 \le x \le 1/2$ är $1 \le 1/\sqrt{1-x} \le \sqrt{2}$, så att
$$\int_\epsilon^{1/2} \frac{dx}{x} \le \int_\epsilon^{1/2} \frac{dx}{x\sqrt{1-x}} \le \sqrt{2} \int_\epsilon^{1/2} \frac{dx}{x}.$$
Men nu är
$$\int_\epsilon^{1/2} \frac{dx}{x} = [\ln x]_\epsilon^{1/2} = -\ln 2 - \ln \epsilon \to +\infty \text{ då } \epsilon \to 0+,$$
vilket innebär att
$$\int_\epsilon^{1/2} \frac{dx}{x\sqrt{1-x}} \ge \int_\epsilon^{1/2} \frac{dx}{x} \to +\infty \text{ då } \epsilon \to 0+;$$
detta visar att vår integral är *divergent*.

Den andra integralen i uppgiften är
$$\int_{1/2}^{1} \frac{dx}{x\sqrt{1-x}} = \lim_{\epsilon \to 0+} \int_{1/2}^{1-\epsilon} \frac{dx}{x\sqrt{1-x}}.$$
Då $1/2 \le x \le 1$ är $1 \le 1/x \le 2$, varför
$$\int_{1/2}^{1-\epsilon} (1-x)^{-1/2}\, dx \le \int_{1/2}^{1-\epsilon} \frac{dx}{x\sqrt{1-x}} \le 2 \cdot \int_{1/2}^{1-\epsilon} (1-x)^{-1/2}\, dx.$$

Eftersom

$$\int_{1/2}^{1-\epsilon} (1-x)^{-1/2}\, dx = \left[-2\,(1-x)^{1/2}\right]_{1/2}^{1-\epsilon} = 2\sqrt{1-1/2} - 2\sqrt{\epsilon}$$

$$\to \sqrt{2} \text{ då } \epsilon \to 0+,$$

följer det att

$$\int_{1/2}^{1-\epsilon} \frac{dx}{x\sqrt{1-x}} \leq 2 \cdot \sqrt{2} \text{ då } \epsilon \to 0+,$$

och detta visar att vår integral är *konvergent*.

8. Termvis derivering av den geometriska serien

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x} \qquad \text{då } |x| < 1$$

visar att

$$1 + 2x + 3x^2 + \ldots n\,x^{n-1} + \cdots = \frac{1}{(1-x)^2},$$

eller

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2};$$

multiplikation med x ger slutligen att

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,x^{n} = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

9.

$$\begin{aligned}
f(x) &= x\,(\pi/2 - \arctan x) \Longrightarrow \\
f'(x) &= \frac{\pi}{2} - \arctan x - x \cdot \frac{1}{1+x^2} \Longrightarrow \\
f''(x) &= -\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} + x \cdot \frac{2x}{(1+x^2)^2} \\
&= \frac{-2-2x^2+2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{-2}{(1+x^2)^2} < 0 \qquad \text{för alla } x.
\end{aligned}$$

Detta visar att $f'(x)$ är *avtagande* för alla x. Eftersom $f'(x)$ avtar mot

$$\lim_{x\to\infty} f'(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - 0 = 0,$$

då $x \to \infty$ följer det att $f'(x) > 0$ för alla x, vilket i sin tur betyder att $f(x)$ är *växande* för alla x.

Då $x \to \infty$ växer alltså $f(x)$ mot

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\pi/2 - \arctan x}{\frac{1}{x}} = \frac{\{0\}}{\{0\}} = \{ \text{ enligt l'Hospital } \} = $$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1.$$

SLUTSATS: $f(x)$ växer mot 1 då x går mot oändligheten, varur följer att $f(x) < 1$ för alla reellla tal x.

10. (a)

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h + 2h^2 \cdot \sin(1/h)}{h}$$
$$= 1 + 2 \lim_{h\to 0} h \cdot \sin(1/h) = 1, \quad \text{eftersom } |\sin x| \leq 1 \text{ för alla } x.$$

(b)

$$x \neq 0 \Longrightarrow f'(x) = 1 + 4x \cdot \sin(1/x) + 2x^2 \cdot \cos(1/x) \cdot (-x^{-2})$$
$$= 1 + 4x \cdot \sin(1/x) - 2 \cdot \cos(1/x).$$

$$x = \frac{\pm 1}{2n\pi} \iff \frac{1}{x} = \pm 2n\pi \Longrightarrow \sin(1/x) = 0 \text{ och } \cos(1/x) = 1$$
$$\Longrightarrow f'\left(\frac{\pm 1}{2n\pi}\right) = 1 + 0 - 2 = -1.$$

(c) *Om* $f(x)$ vore växande på ett icke-tomt intervall $(-\delta, \delta)$, *så* skulle $f'(x) \geq 0$ för alla x i intervallet. Men ett sådant intervall innehåller bergsäkert punkter $\frac{\pm 1}{2n\pi}$ för tillräckligt stora n, och i sådana punkter är derivatan lika med -1 enligt ovan – det vill säga att vi får en motsägelse. Så det finns inget intervall $(-\delta, \delta)$ omkring origo där $f(x)$ är växande.