

Institutionen för Matematik,
KTH.

**Tentamen i 5B1115 Matematik 1 för B, E, IT, ME, Media samt
för äldre teknologer tillhörande BIO, K, M och T, 21:e augusti
2003, kl. 8⁰⁰–13⁰⁰.**

- Inga hjälpmedel!
- För betyg 3 (godkänt), 4 och 5 krävs minst 16, 22 respektive 30 poäng, inklusive bonuspoäng.
- Alla behandlade uppgifter *skall* förses med utförliga lösningar och noggranna motiveringar. Annars BLIR DET AVDRAG.
- Det finns lösningar på nätet efter skrivningstidens slut.

1. Visa att $2^n + 3^n < 4^n$ då $n = 2, 3, 4, \dots$ (3p)

2. Bestäm allmänna lösningen till differentialekvationen

$$y'' - y = 4x e^x. \quad (3p)$$

3. Visa att

$$\arctan \frac{1+x}{1-x} = \arctan x + \frac{\pi}{4} \quad \text{då } x < 1. \quad (3p)$$

Ledning: Det kan vara lämpligt att först visa att derivatorna är lika.

4. Bestäm en primitiv funktion $F(x)$ till

$$f(x) = \frac{x}{(x+1)(x^2+x+1)}. \quad (4p)$$

5. Använd Taylorutveckling för att beräkna $\sqrt{5}$ med ett fel som till beloppet är högst lika med 0,005. *Ledning:* Eftersom $\sqrt{5} = \sqrt{4+1} = 2\sqrt{1+1/4}$ kan det vara lämpligt att Taylorutveckla $f(x) = 2\sqrt{1+x}$ omkring $x = 0$, och sedan sätta in $x = 1/4$. (4p)

6. Beräkna volymen av den kropp som alstras vid ett varvs rotation omkring x -axeln av kurvan $y^2 = x^2(1-x)$, $0 \leq x \leq 1$. (3p)

7. Undersök huruvida integralerna

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{x\sqrt{1-x}} \quad \text{och} \quad \int_{1/2}^1 \frac{dx}{x\sqrt{1-x}}$$

konvergerar eller divergerar. (4p)

8. Beräkna $\sum_{n=1}^{\infty} n x^n$ då $|x| < 1$. *Ledning:* Man kan visa att derivatan av en konvergent potensserie inom konvergensintervallet fås genom att derivera serien *termvis*. Den serie som är given här är relaterad till den termvisa derivatan av en *mycket välbekant* serie. (3p)

9. Visa först att funktionen $f(x) = x(\pi/2 - \arctan x)$ är strängt växande för alla x , och visa sedan att det finns en konstant M så att $f(x) < M$ för alla x . (4p)

10. Från differentialkalkylens medelvärdessats sluter man att $f'(x) > 0$ då $a < x < b \implies f(x)$ är växande på (a, b) . Vidare, om $f'(x_0) > 0$ och $f'(x)$ är *kontinuerlig* i x_0 , så följer det att $f'(x) > 0$ på ett litet intervall omkring x_0 , så att $f(x)$ är växande där. Men vad händer om $f'(x_0) > 0$ och $f'(x)$ inte är kontinuerlig i x_0 ?

För att få en inblick i vad som kan inträffa betraktar vi funktionen

$$f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

- (a) Visa att $f'(0) = 1$ (förslagsvis genom att använda derivatans definition).

- (b) Beräkna $f'(x)$ då $x \neq 0$, och visa att

$$f' \left(\frac{\pm 1}{2n\pi} \right) = -1 \quad \text{då } n = 1, 2, 3, \dots$$

- (c) Slut härur att det inte finns något $\delta > 0$ så att $f(x)$ är växande på intervallet $(-\delta, \delta)$ – trots att $f'(0) = 1$! (4p)

Lycka till!