

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x \arctan(2x) - \ln(1 + 4x^2)}{x - 1 + e^{-x}} = \{ \text{typ } 0/0, \text{ L'Hospital} \} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \arctan(2x) + \frac{8x}{1 + 4x^2} - \frac{8x}{1 + 4x^2}}{1 - e^{-x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \arctan(2x)}{1 - e^{-x}} = \{ \text{typ } 0/0, \text{ L'Hospital} \} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8}{e^{-x}} = 8. \quad \boxed{\text{Svar: } 8.}$$

2. Implicit derivering av $xy^3 + 4x^3y = 16$ ger $y^3 + 3xy^2y' + 12x^2y + 4x^3y' = 0$. För $x = 1$ och $y = 2$ fås $16y' + 32 = 0$ dvs $y'(2) = -2$. Tangenten ges av $\frac{y-2}{x-1} = -2$, dvs $2x + y = 4$.

Svar: $2x + y = 4$.

3. Vi har $\frac{3x^2 + 5x - 6}{x^3 - x^2} = \frac{3x^2 + 5x - 6}{x^2(x - 1)} = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x - 1}$. Med "handpåläggning" får man $a = 6$ och $c = 2$. För $x = -1$ får man sedan $4 = 5 - b$, dvs $b = 1$. Alltså

$$\int_2^3 \frac{3x^2 + 5x - 6}{x^3 - x^2} dx = \int_2^3 \frac{6}{x^2} dx + \int_2^3 \frac{1}{x} dx + \int_2^3 \frac{2}{x - 1} dx = \left[-\frac{6}{x} \right]_2^3 + \left[\ln|x| \right]_2^3 + \left[2 \ln|x - 1| \right]_2^3 =$$

$$= 1 + \ln 2 + \ln 3. \quad \boxed{\text{Svar: } 1 + \ln 2 + \ln 3.}$$

4. Vi kontrollerar att påståendet " $5^n - 1$ är jämnt delbart med 4" är sant för $n = 1$: " $5^1 - 1$ är jämnt delbart med 4". Detta är sant.

Antag att påståendet är sant för $n = k$, dvs antag att det är sant att $5^k - 1$ är jämnt delbart med 4.

Vi vill visa att påståendet är sant för $n = k + 1$, dvs vi vill visa att det är sant att $5^{k+1} - 1$ är jämnt delbart med 4.

Vi har $5^{k+1} - 1 = 5 \cdot 5^k - 1 = 5^k - 1 + 4 \cdot 5^k$. De båda talen $5^k - 1$ och $4 \cdot 5^k$ är jämnt delbara med 4 ($5^k - 1$ enligt antagandet) och då är deras summa också jämnt delbart med 4. Enligt induktionsprincipen är påståendet sant för $n = 1, 2, 3, \dots$.

5. Eftersom $\frac{2001n^2 + 10n + 23}{23n^3 + 10n + 2001} > \frac{1}{n} > 0$ (för $n > 1$) och serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ är divergent (enligt majorantprincipen) serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2001n^2 + 10n + 23}{23n^3 + 10n + 2001}$ är divergent. **Svar:** Divergent.

6. Funktionen $f(x) = \frac{1-x}{1+x^2} + \arctan x$ är definierad och deriverbar för alla x fi endast en kritisk punkt kan vara en lokal extrempunkt. Kritiska punkter fås ur ekvationen $f'(x) = 0$. Här är $f'(x) = \frac{-(1+x^2) - 2x(1-x)}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{1+x^2} = \frac{2x(x-1)}{(1+x^2)^2}$ och ur $\frac{2x(x-1)}{(1+x^2)^2} = 0$ fås två kritiska punkter $x = 0$ och $x = 1$.

I intervallet $x < 0$ är $f'(x) > 0$ fi f är växande på detta intervall.

I intervallet $0 < x < 1$ är $f'(x) < 0$ fi f är avtagande på detta intervall.

I intervallet $x > 1$ är $f'(x) > 0$ fi f är växande på detta intervall.

Av detta följer att $x = 0$ är en lokal maximipunkt och $x = 1$ är en lokal minimipunkt för f .

I dessa punkter antar f värdena $f(0) = 1$ och $f(1) = p/4$.

Eftersom $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = p/2 > 1$ och $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -p/2 < p/4$ så antar f alla värden i det öppna intervallet $] -p/2, p/2[$.

Svar: lokal max i $x = 0$ och lokal min i $x = 1$. Värdeområdet = $] -p/2, p/2[$.

7. Kurvorna $y = x\sqrt{5-x^2}$ och $y = x(3-x)$ skär varandra då $x\sqrt{5-x^2} = x(3-x)$ fi $x = 0$ eller $\sqrt{5-x^2} = 3-x$. Denna ekvation kvadreras ledvis. Man får $5-x^2 = 9-6x+x^2$ och två lösningar $x = 1$ och $x = 2$, vilka uppfyller den ursprungliga ekvationen.

I intervallet $0 \leq x \leq 1$ är $x\sqrt{5-x^2} \leq x(3-x)$ medan i intervallet $1 \leq x \leq 2$ är $x\sqrt{5-x^2} \geq x(3-x)$. Detta medför att den sökta arean ges av

$$A = \int_0^1 [x(3-x) - x\sqrt{5-x^2}] dx + \int_1^2 [x\sqrt{5-x^2} - x(3-x)] dx =$$

$$= \int_0^1 (3-x) dx - \int_0^1 (3-x) dx - \int_0^1 \sqrt{5-x^2} dx + \int_1^2 \sqrt{5-x^2} dx.$$

Vi har $\int_0^1 (3-x) dx - \int_1^2 (3-x) dx = \int_0^1 (3x-x^2) dx - \int_1^2 (3x-x^2) dx =$

$$= \left[\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 - \left[\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_1^2 = \frac{7}{6} - \frac{13}{6} = -1.$$

och $-\int_0^1 \sqrt{5-x^2} dx + \int_1^2 \sqrt{5-x^2} dx = \{ \sqrt{5-x^2} = t, 5-x^2 = t^2, x dx = -t dt \} =$

$$= -\int_{\sqrt{5}}^2 t^2 dt + \int_2^1 t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3} \right]_{\sqrt{5}}^2 - \left[\frac{t^3}{3} \right]_2^1 = \frac{8}{3} - \frac{5\sqrt{5}}{3} + \frac{7}{3} = 5 - \frac{5\sqrt{5}}{3}$$

alltså $A = -1 + 5 - \frac{5\sqrt{5}}{3} = 4 - \frac{5\sqrt{5}}{3}.$

Svar: $4 - 5\sqrt{5}/3.$

8. Den karakteristiska ekvationen $r^2 + 4r + 4 = 0$ har en dubbel lösning $r = -2$ fi den allmänna lösningen till den homogena ekvationen är $y_h = (Ax + B)e^{-2x}$.

En partikulär lösning y_1 till ekvationen $y'' + 4y' + 4y = 8x$ söks på formen $y = ax + b$:

$y' = a$, $y'' = 0$, vilket insatt i ekvationen ger $4a + 4(ax + b) = 8x$. Identifiering av de båda leden ger $4a = 8$ och $4a + 4b = 0$ dvs $a = 2$ och $b = -2$. Alltså $y_1 = 2x - 2$.

En partikulär lösning y_2 till ekvationen $y'' + 4y' + 4y = 6e^{-2x}$ söks på formen $y = ax^2e^{-2x}$. (ae^{-2x} och axe^{-2x} är termer i y_h .) Man får $y' = 2a(1-x)e^{-2x}$ och $y'' = 2a(1-4x+2x^2)e^{-2x}$, vilket insatt i ekvationen ger $2ae^{-2x} = 6e^{-2x}$ alltså $a = 3$ och $y_2 = 3x^2e^{-2x}$.

Den allmänna lösningen är $y = y_h + y_1 + y_2$.

Svar: $y = (Ax + B)e^{-2x} + 2x - 2 + 3x^2e^{-2x}.$

9. Vi har $0 < 2 \arcsin \frac{1}{3} < \pi$ och $0 < \arccos \frac{2}{3} < \frac{\pi}{2}$. Man får

$$\cos \hat{2 \arcsin \frac{1}{3}} = \cos^2 \hat{\arcsin \frac{1}{3}} - \sin^2 \hat{\arcsin \frac{1}{3}} = \frac{8}{9} - \frac{1}{9} = \frac{7}{9} \text{ och } \cos \hat{\arccos \frac{2}{3}} = \frac{2}{3} < \frac{7}{9}.$$

Eftersom $\cos$ är en avtagande funktion på intervallet $0 \leq x \leq \pi$ så är $2 \arcsin \frac{1}{3} < \arccos \frac{2}{3}$.

Svar: $\arccos \frac{2}{3}.$

10. a. Se kursboken sid 234.

b. $\int_x^y f(t) dt = \{ \text{integralkalkylens medelvärdessats} \} = (y-x) f(c)$ fi

$$(y-x)x^3 \leq (y-x) f(c) \leq (y-x)y^3 \text{ fi}$$

$$x^3 \leq f(c) \leq y^3, \text{ (om } y > x; \text{ omkastade olikheter om } x < y) \text{ fi}$$

$$\text{(instängningsprincipen) } \lim_{y \rightarrow x^+} f(c) = x^3 \text{ fi (kontinuiteten) } f(x) = \lim_{y \rightarrow x} f(c) = x^3.$$

Svar: $f(x) = x^3.$