

Tentamensskrivning, år–månad–dag, kl. x.00–x+5.00.

5B1115, Matematik 1, för B, E, I, IT, M, Media och T.

Preliminära gränser för betygen 3, 4 och 5 är 16, 22 respektive 30 poäng inklusive bonuspoäng. Varje bonuspoäng ger 1 poäng på tentamen.

Det maximala antalet poäng på varje uppgift är angivet inom parentes i anslutning till uppgiften.

Samtliga behandlade uppgifter bör förses med utförlig lösning.

Inga hjälpmedel är tillåtna.

ANGE GRUPPNUMMER ELLER L ÄRARENS NAMN P Å OMSLAGET !

1. Ekvationen $xy - \ln(x - y) = 2$ definierar en funktion $y = y(x)$ sådan att $y(2) = 1$. Visa att funktionen y har lokal maximum i punkten $x = 2$. (3p)
2. För vilka värden på konstanten a är serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{an^3 + n - 1}{n^3 + 1}$ konvergent? (3p)
3. Beräkna integralen $\int_3^8 \frac{\sqrt{x+1}}{x(\sqrt{x+1}-1)} dx$. (3p)
4. Bestäm och karakterisera lokala extrempunkter till funktionen $f(x) = x^2 - 2x - \ln(1 + x^2) + 2 \arctan x$. (3p)
5. Bestäm Taylorutvecklingen av ordning 2 av funktionen $f(x) = \arcsin \frac{1}{\sqrt{x}}$ kring punkten $x = 2$. Restermen ges på ordoform. (3p)
6. Formulera och bevisa integralkalkylens medelvärdessats. (4p)
7. Beräkna volymen av den kropp som uppstår då det ändliga området mellan linjen $y = x$ och kurvan $y = x\sqrt[4]{2-x^3}$ roterar ett varv kring x -axeln. (4p)
8. Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen $y'' - 6y' + 9y = 5 \sin x + 4 e^{3x}$. (4p)
9. Visa med induktion att $\frac{2n}{3} < 4^n$ för $n = 1, 2, 3, \dots$. (4p)
10. För en kontinuerlig funktion f gäller att $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{kx}{n}\right) \cdot \frac{x}{n} = \arctan x$. Bestäm f . (4p)

1. Implicit derivering av $xy - \ln(x - y) = 2$ ger $y + xy' - \frac{1-y'}{x-y} = 0$. För $x = 2, y = 1$ fås $y' = 0$.
 Implicit derivering av $y + xy' - \frac{1-y'}{x-y} = 0$ ger $y' + y' + xy'' - \frac{-y''(x-y) - (1-y')^2}{(x-y)^2} = 0$. För $x = 2, y = 1$ och $y' = 0$ fås $3y'' + 1 = 0$, dvs $y''(2) = -\frac{1}{3} < 0$.

Eftersom $y'(2) = 0$ och $y''(2) < 0$ så är $x = 2$ en lokal maximipunkt till y .

2. Ett nödvändig villkor för konvergensen är att $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^3 + n - 1}{n^3 + 1} = 0$. Detta innebär att $a = 0$ är ett krav för konvergensen. För $a = 0$ har vi $0 < \frac{n-1}{n^3+1} < \frac{1}{n^2}$ och serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ är konvergent. Enligt majorantprincipen är serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^3+1}$ också konvergent.

Svar: $a = 0$.

3. $\int_3^8 \frac{\sqrt{x+1}}{x(\sqrt{x+1}-1)} dx = \{ \sqrt{x+1} = t, x = t^2 - 1, dx = 2t dt \} = \int_2^3 \frac{2t^2}{(t^2-1)(t-1)} dt$
 Vi har $\frac{2t^2}{(t^2-1)(t-1)} = \frac{2t^2}{(t-1)^2(t+1)} = \frac{a}{(t-1)^2} + \frac{b}{t-1} + \frac{c}{t+1}$. Med "handpåläggning" fås $a = 1$ och $c = \frac{1}{2}$. För $t = 0$ får man sedan $b = \frac{3}{2}$. Alltså

$$\begin{aligned} \int_2^3 \frac{2t^2}{(t^2-1)(t-1)} dt &= \int_2^3 \frac{1}{(t-1)^2} dt + \frac{3}{2} \int_2^3 \frac{1}{t-1} dt + \frac{1}{2} \int_2^3 \frac{1}{t+1} dt = \\ &= \left[\frac{-1}{t-1} \right]_2^3 + \frac{3}{2} \left[\ln \Omega t - 1 \Omega \right]_2^3 + \frac{1}{2} \left[\ln \Omega t + 1 \Omega \right]_2^3 = \frac{1 + 5 \ln 2 - \ln 3}{2}. \end{aligned}$$

Svar: $\frac{1 + 5 \ln 2 - \ln 3}{2}$.

4. Funktionen $f(x) = x^2 - 2x - \ln(1 + x^2) + 2 \arctan x$ är definierad och deriverbar för alla x fi endast en kritisk punkt kan vara en lokal extrempunkt. Kritiska punkter fås ur ekvationen $f'(x) = 0$.

Här är $f'(x) = 2x - 2 - \frac{2x}{1+x^2} + \frac{2}{1+x^2} = \frac{2x^2(x-1)}{1+x^2}$ och ur $\frac{2x^2(x-1)}{1+x^2} = 0$ fås två kritiska punkter $x = 0$ och $x = 1$.

I intervallet $x < 0$ är $f'(x) < 0$ fi f är avtagande på detta intervall.

I intervallet $0 < x < 1$ är $f'(x) < 0$ fi f är avtagande på detta intervall.

I intervallet $x > 1$ är $f'(x) > 0$ fi f är växande på detta intervall.

Av detta följer att $x = 1$ är en lokal minimipunkt för f .

Svar: lok min i $x = 1$.

5. Den sökta utvecklingen är $f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{1}{2!} f''(2)(x-2)^2 + O((x-2)^3)$.

Vi har $f(x) = \arcsin \frac{1}{\sqrt{x}}$, $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}} \cdot \frac{-1}{2x\sqrt{x}} = \frac{-1}{2x\sqrt{x-1}}$ och $f''(x) = \frac{3x-2}{4x^2(x-1)^{3/2}}$.

För $x = 2$ fås $f(2) = \frac{\pi}{4}$, $f'(2) = \frac{-1}{4}$ och $f''(2) = \frac{1}{4}$.

Svar: $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}(x-2) + \frac{1}{8}(x-2)^2 + O((x-2)^3)$.

6. Se kursboken sid 234.

7. Linjen $y = x$ och kurvan $y = x\sqrt[4]{2-x^3}$ skär varandra då $x = x\sqrt[4]{2-x^3}$ vilket ger $x = 0$ och $x = 1$. I intervallet $0 \leq x \leq 1$ är $x \leq x\sqrt[4]{2-x^3}$. Den sökta volymen ges av

$$V = \int_0^1 x^2 \sqrt{2-x^3} dx - \int_0^1 x^2 dx = \left\{ \sqrt{2-x^3} = t, 2-x^3 = t^2, x^3 = 2-t^2, x^2 dx = -\frac{2}{3} t dt \right\} =$$
$$= \int_{\sqrt{2}}^1 \frac{2}{3} t^2 dt - \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = -\frac{2p}{3} \left[\frac{t^3}{3} \right]_{\sqrt{2}}^1 - \frac{p}{3} = \frac{(4\sqrt{2}-5)p}{9}.$$

Svar: $\frac{(4\sqrt{2}-5)p}{9}$.

8. Den karakteristiska ekvationen $r^2 - 6r + 9 = 0$ har en dubbel lösning $r = 3$ fi den allmänna lösningen till den homogena ekvationen är $y_h = (Ax + B)e^{3x}$.

Vi söker en partikulär lösning y_1 till ekvationen $y'' - 6y' + 9y = \sin x$. Lösningen söks på formen $y = a \sin x + b \cos x$: $y' = a \cos x - b \sin x$, $y'' = -a \sin x - b \cos x$, vilket insatt i ekvationen ger $(8a + 6b) \sin x + (8b - 6a) \cos x = 5 \sin x$.

Identifiering av de båda leden ger $8a + 6b = 5$ och $8b - 6a = 0$ dvs $a = \frac{2}{5}$ och $b = \frac{3}{10}$. Alltså $y_1 = \frac{2}{5} \sin x + \frac{3}{10} \cos x$.

En partikulär lösning y_2 till ekvationen $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}$ söks på formen $y = ax^2 e^{3x}$.

(ae^{3x} och axe^{3x} är termer i y_h .) Man får $y' = (2ax + 3ax^2)e^{3x}$, $y'' = (2a + 12ax + 9ax^2)e^{3x}$, vilket insatt i ekvationen ger $2ae^{3x} = 4e^{3x}$ alltså $a = 2$ och $y_2 = 2x^2 e^{3x}$.

Den allmänna lösningen är $y = y_h + y_1 + y_2$.

Svar: $y = (Ax + B)e^{3x} + \frac{2}{5} \sin x + \frac{3}{10} \cos x + 2x^2 e^{3x}$.

9. Kontrollera att påståendet " $\hat{P}_n < 4^n$ " är sant för $n = 1$: $\hat{P}_1 < 4^1$. Detta är sant, ty $\hat{P}_1 = 2$.

Antag att påståendet är sant för $n = k$, dvs antag att det är sant att $\hat{P}_k < 4^k$.

Visa att påståendet är sant för $n = k + 1$, dvs visa att det är sant att $\hat{P}_{k+1} < 4^{k+1}$.

Vi har

$$\hat{P}_{k+1} = \frac{(2k+2)!}{(k+1)! \cdot (k+1)!} = \frac{(2k+2)(2k+1)(2k)!}{(k+1) \cdot k! \cdot (k+1) \cdot k!} = \frac{(2k+2)(2k+1)}{(k+1)(k+1)} \cdot \frac{(2k)!}{k! \cdot k!} =$$
$$= \frac{(2k+2)(2k+1)}{(k+1)(k+1)} \cdot \hat{P}_k < \frac{(2k+2)(2k+1)}{(k+1)(k+1)} \cdot 4^k = \frac{2(2k+1)}{(k+1)} \cdot 4^k < 4 \cdot 4^k = 4^{k+1}.$$

Enligt induktionsprincipen är påståendet sant för $n = 1, 2, 3, \dots$.

10. Vi har $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\hat{P}_n}{n} \cdot \frac{x}{n} = \int_0^x (t) dt$. Alltså $\int_0^x (t) dt = \arctan x$ och ledvis derivering ger att

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Svar: $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.