Institutionen för matematik
KTH

Lösningaförslag till tentamensskrivning, 2002–01–08, kl. 8.00–13.00.

5B1115, Matematik 1, för B, E, I, IT, M, Media och T.

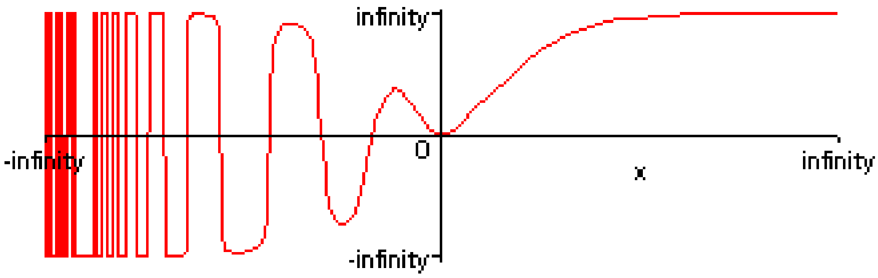
1. differentialekvationen $y'' + 2y' + 10y = 9e^x$ har den allmänna lösningen $y = y_h + y_p$. karakteriska ekvationen $r^2 + 2r + 10 = 0 \Rightarrow r = -1 \mp 3i$. den homogena lösningen $y_h = e^{-x}(a\cos 3x + b\sin 3x)$. den partikulära fås via ansatsen $y_p = ke^x$, som ger $y_p = \frac{9}{13}e^x$.

del svar $y = y_h + y_p = e^{-x}(a\cos 3x + b\sin 3x) + \frac{9}{13}e^x$

Konstanterna a och b fås ur $y(0) = y'(0) = 0$ som ger $a = \frac{-9}{13}$, $b = \frac{-6}{13}$

$$\boxed{\textbf{Svar: } y = -e^{-x}\left(\frac{9}{13}\cos 3x + \frac{6}{13}\sin 3x\right) + \frac{9}{13}e^x\ .}$$

En bild



2. Vi har $f(x) = (x^2 - 3)e^x$, $f'(x) = 2x\,e^x + (x^2 - 3)e^x = (x^2 + 2x - 3)e^x$ och $f''(x) = (2x + 2)e^x + (x^2 + 2x - 3)e^x = (x^2 + 4x - 3)e^x$. Eventuella lokala extrempunkter fås ur ekvationen $f'(x) = 0$: $(x^2 + 2x - 3)e^x = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow$ $x = -3$ eller $x = 1$.
I dessa punkter är $f''(-3) < 0$ och $f''(1) > 0 \Rightarrow x = -3$ är en lokal maximipunkt och $x = 1$ är en lokal minimipunkt.
Eftersom $\lim_{x\to\infty} f(x) > f(-3) \Rightarrow$ största värdet ej antas.
Eftersom $\lim_{x\to-\infty} f(x) > f(1) = -2e \Rightarrow f$ antar minsta värdet i punkten $x = 1$.

$$\boxed{\textbf{Svar: } \text{lok. min. i } x = 1,\ \text{lok. max. i } x = -3,\ \text{minsta värde } -2e.}$$

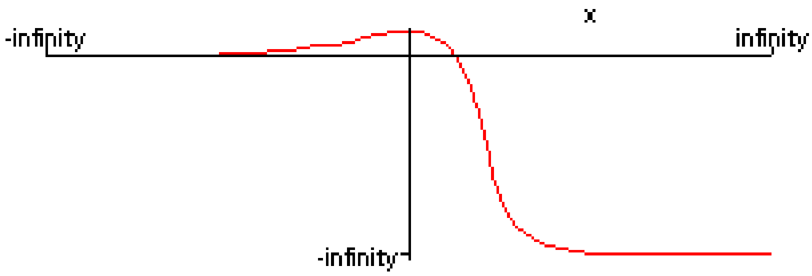
3. Sätt $f(x) = e^x(1 - x)$. Vi visar t.ex att $\max f(x) = 1$ för alla $x \in \mathbb{R}$
Sedvanliga metoder ger $f'(x) = -xe^x$.

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1-x}{e^{-x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$,L'hopitalsregel ger $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$.

Vidare , är $\lim_{x\to\infty} e^x(1-x) = \lim_{x\to\infty} e^x(-x) = -\infty$
Vi har följande tabell

x	$-\infty$		0		∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\to 0$	växer	1	avtar	$\to -\infty$

$\Rightarrow f(x) \le \max f(x) = f(0) = 1$ för alla $x \in \mathbb{R}$



4. $\displaystyle\int_0^1 \arctan\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \{\ \sqrt{x} = t,\ \ x = t^2,\ \ dx = 2t\,dt\ \} = \int_0^1 2t\arctan\frac{1}{t}\,dt = \{\text{ partiell integration }\} =$

$$= \left[t^2\arctan\frac{1}{t}\right]_0^1 - \int_0^1 t^2\cdot\frac{1}{1+1/t^2}\cdot\frac{-1}{t^2}\,dt = \frac{\pi}{4} + \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{4} + \int_0^1\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \left[t - \arctan t\right]_0^1 = 1.$$

Svar: 1.

5. a. Se läroboken

5b. volymen ges av

$$\pi\int_0^{1/2}\frac{x^2}{1-x^2}dx = \pi\int_0^{1/2}\frac{x^2-1+1}{1-x^2}dx = \pi\int_0^{1/2}\frac{-(1-x^2)+1}{1-x^2}dx = \pi\int_0^{1/2}-1+\frac{1}{1-x^2}dx =$$

$$\pi\left[\int_0^{1/2}-1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)dx\right] = \pi\left[-x+\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right]_0^{172} = \pi\left(\frac{1}{2}(\ln 3-1)\right)$$

Svar: $\pi\left[\frac{1}{2}(\ln 3-1)\right]$.

6. Det sökta Taylorpolynomet har formen $p(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2$. Vi har

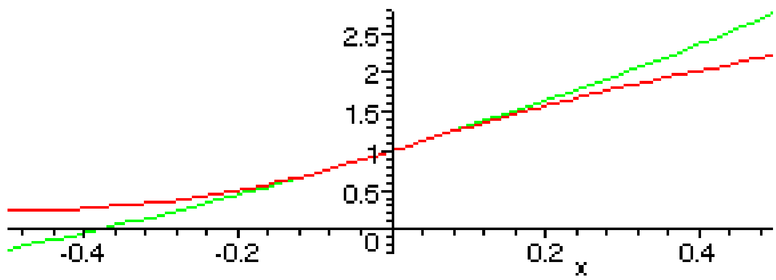
$$f(x) = \arctan 3x + \sqrt{1+2x^2},\quad f'(x) = \frac{3}{1+9x^2} + \frac{2x}{\sqrt{1+2x^2}},$$

$f''(x) = \dfrac{-54x}{(1+9x^2)^2} + \dfrac{2}{(1+2x^2)^{3/2}}$ och i punkten $x = 0$ fås $f(0) = 1$, $f'(0) = 3$

och $f''(0) = 2$ vilket ger

Svar: $1 + 3x + x^2$.

En bild



7a. Se läroboken.

7b. $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}$.

Svar: $-1/x^2$.

8.a. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 3$ (ty en geometrisk serie) Serien är konvergent.

8.b. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{7^n+1}{5^n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$, där $a_n = \frac{7^n+1}{5^n+1} = \frac{\left(\frac{7}{5}\right)^n + \frac{1}{5^n}}{1+\frac{1}{5^n}} \to \infty,\ n\to\infty.(\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0)$

Således enligt sats 9.2 så är serien divergent.

---

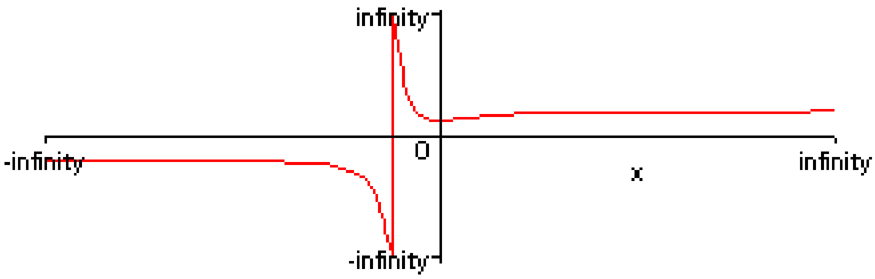
9. Sedvanliga metoder ger att och

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{2x}{\left(1+x^2\right)(1+x)^2}, \quad x \neq -1$$

och vi har följande tabell

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	avtår	1	växer	$\pi/2$

Tabellen visar att $f(x) > -1$ och således $f(x)$ saknar nollställe för $x > -1$.
En bild



---

10. $f(x) = a + bx + ce^{ax},\quad f(0) = a + c,\quad f'(x) = b + ace^{ax}$ ger insatta i medelvärdessatsen

$$bx + ce^{ax} - c = \left(b + ace^{a\theta x}\right)x \Leftrightarrow ce^{ax} - c = acxe^{a\theta x}, ac \neq 0$$

$e^{a\theta x} = \frac{e^{ax}-1}{ax} \Leftrightarrow \theta = \frac{1}{ax}\ln\left[\frac{e^{ax}-1}{ax}\right]$.Sätt $ax = t,\ x\to 0 \Leftrightarrow t\to 0$,då fås

$$\lim_{x\to 0}\theta(x) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\ln\left[\frac{e^t - 1}{t}\right] = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\ln\left[\frac{1 + t + \frac{t^2}{2} + 0(t^3) - 1}{t}\right] =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\ln\left[1 + \frac{t}{2} + 0\left(t^2\right)\right] = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(\frac{t}{2} + 0\left(t^2\right)\right) = \lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{2} + 0\left(t\right)\right) = \frac{1}{2}$$

Svar: $\lim_{x\to 0}\theta(x) = 1/2$.