

Lösningar till tentamen i Matematik I, 5B1115, 020815.

$$1. \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2+x-2} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{(x-1)(x+2)} = \int_{-1}^0 \left(\frac{1/3}{x-1} - \frac{1/3}{x+2} \right) dx =$$

$$= \left[\frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{3} \ln|x+2| \right]_{-1}^0 = 0 - \frac{1}{3} \ln 2 - \left(\frac{1}{3} \ln 2 - 0 \right) = \underline{-\frac{2}{3} \ln 2}$$

$$2. f(x) = \arctan(1+3x), \quad f(0) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

$$f'(x) = \frac{3}{1+(1+3x)^2}, \quad f'(0) = \frac{3}{2}$$

$$f''(x) = \frac{-3 \cdot 2(1+3x) \cdot 3}{(1+(1+3x)^2)^2}, \quad f''(0) = \frac{-18}{4} = -\frac{9}{2}$$

$$\text{Mac L-utveckl. : } f(x) = \underline{\frac{\pi}{4} + \frac{3x}{2} - \frac{9x^2}{4} + R_2}$$

$$3. e^{x-y} - e^{x+y} = x+y, \quad y = y(x), \quad y(0) = 0$$

Derivering m. ans. på x:

$$e^{x-y} (1-y') - e^{x+y} (1+y') = 1+y', \quad x=0 \Rightarrow y=0:$$

$$e^0 (1-y'(0)) - e^0 (1+y'(0)) = 1+y'(0)$$

$$-2y'(0) = 1+y'(0) \quad \text{ger} \quad \underline{y'(0) = -1/3}$$

$$4. \quad y'' - y = e^{-x} \sin x$$

$$y_H: r^2 - 1 = 0 \quad \text{ger } r = \pm 1, \quad y_H = A e^x + B e^{-x}$$

$$y_P: y_P = \operatorname{Im} y_P^*, \quad \text{dör } (D^2 - 1) y_P^* = e^{(-1+i)x}$$

$$\text{Sätt } y_P^* = z \cdot e^{(-1+i)x}$$

Förklaringsregeln:

$$(D^2 - 1) z e^{(-1+i)x} = e^{(-1+i)x} \quad ((D - 1 + i)^2 - 1) z = e^{(-1+i)x}$$

$$(D^2 + 2(-1+i)D + (-1+i)^2 - 1) z = 1$$

$$(D^2 + 2(-1+i)D - 1 - 2i) z = 1 \quad ; \quad \text{Ansatz } z = a + bi$$

$$z = -\frac{1}{1+2i}, \quad y_P^* = -\frac{e^{(-1+i)x}}{1+2i} = -\frac{(1-2i)e^{-x}(\cos x + i \sin x)}{1+4}$$

$$y_P = \operatorname{Im} y_P^* = e^{-x} \left(-\frac{1}{5} \sin x + \frac{2}{5} \cos x \right)$$

$$\text{Allmän lös: } y = y_H + y_P = \underline{A e^x + B e^{-x} + e^{-x} \left(-\frac{1}{5} \sin x + \frac{2}{5} \cos x \right)}$$

$$5. \quad \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{3 + \cos^2 x} dx = \left[\begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{array} \right] = \int_1^{-1} \frac{-dt}{3 + t^2} = \int_1^{-1} \frac{dt}{3 + t^2} =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \text{jämna integrand} \\ \text{symm. intervall} \end{array} \right] = 2 \int_0^1 \frac{dt}{3(1 + (t/\sqrt{3})^2)} = \frac{2}{3} \left[\sqrt{3} \arctan \frac{t}{\sqrt{3}} \right]_0^1 =$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3} \left(\arctan \frac{1}{\sqrt{3}} - \arctan 0 \right) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \left(\frac{\pi}{6} - 0 \right) = \underline{\underline{\frac{\pi\sqrt{3}}{9}}}$$

6. $g(x) = x + 2 \ln(x-1) + \frac{3}{x-1} - 5 \geq 0$ för $x > 1$

Ska visas.

$$g'(x) = 1 + \frac{2}{x-1} - \frac{3}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 + 2(x-1) - 3}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 4}{(x-1)^2}$$

	1	2
g	$\searrow$	$\nearrow$
g'	$-$	$+$

Teckenstudiet visar att

$$g(x) \geq 0 \text{ för } x > 1.$$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \cos \frac{1}{n})$, $a_n = 1 - \cos \frac{1}{n} =$

$$= 1 - \left(1 - \frac{1}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right) = \frac{1}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

$a_n > 0$; jämför med $b_n = \frac{1}{n^2}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\frac{1}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)) = 1 \neq 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ konv} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \cos \frac{1}{n}) \text{ konvergent.}$$

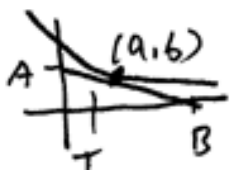
8. I intervallet $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ gäller $\sin x \leq x \Rightarrow$

$$\sin^2 x \leq x^2 \Rightarrow \sqrt{1 - \sin^2 x} \geq \sqrt{1 - x^2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} \leq \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

i intervallet. Alltså: $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} =$

$$= \left[\arcsin x \right]_0^{\frac{1}{2}} = \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} \quad \text{VSV.}$$

$$= \left[\arcsin x \right]_0^1 = \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} \quad \text{VSV.}$$

9.  $y = e^{-x}$ Tangenten ekv. i (a, b) :
 $y - b = y'(a)(x - a)$, $y' = -e^{-x}$,
alltså: $y - b = (-e^{-a})(x - a)$

Punkten $A: (0, b + ae^{-a})$, $B: (a + be^a, 0)$

Triangelns area, $T = \frac{1}{2}(b + ae^{-a})(a + be^a)$

$b = e^{-a}$ ger $T(a) = \frac{1}{2}e^{-a}(a+1)^2$

$T'(a) = \frac{1}{2}e^{-a}(2(a+1) - (a+1)^2) = \frac{1}{2}e^{-a}(a+1)(2 - (a+1))$

$T'(a) = 0$ ger för positiva a : $a = 1$

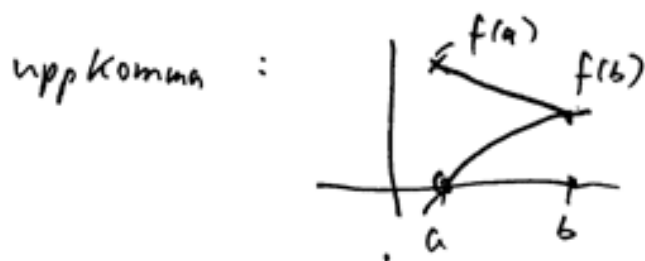
$T'(a) = \frac{1}{2}e^{-a}(1-a^2)$, $T''(a) = \frac{1}{2}e^{-a}(-2a - (1-a^2))$

$T''(1) = -e^{-1} < 0 \Rightarrow T(1)$ är ett maximum

$T(1) = \frac{2}{e}$ är alltså den maximala arean som

erhålls då $(a, b) = \underline{(1, 1/e)}$.

10. Om $f(x)$ inte är kontinuerlig på det slutna intervallet $[a, b]$ kan följande situation



Kordan mellan ändpunkterna har negativ lutning,

medan kurvan i det öppna intervallet $]a, b[$ är växande och alltså har tangenten med

medan kurvan i det öppna intervallet $]a, b[$
är växande och alltså har tangenter med
positiv lutning.