

Institutionen för matematik.
KTH

Tentamen i Matematik 1, 5B1115, för B, E, I, IT, M, Media
och T torsdagen den 15/8 2002, kl. 8.00 - 13.00

- Inga hjälpmedel tillåtna.
- Preliminära gränser för betygen 3, 4 och 5 är 16, 22 respektive 30 poäng inklusive bonuspoäng.
- Varje uppgift skall (om inget annat anges) förses med utförliga lösningar och noggranna motiveringar.

1. Bestäm $\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2 + x - 2}$ (3p)

2. MacLaurinutveckla $f(x) = \arctan(1 + 3x)$ till och med andra graden. (3p)

3. Bestäm $y'(0)$ för den deriverbara funktion $y(x)$ som definieras implicit av $e^{x-y} - e^{x+y} = x + y$ i en omgivning av $x = 0$, så att $y(0) = 0$. (3p)

4. Bestäm allmänna lösningen till differentialekvationen $y'' - y = e^{-x} \sin x$. (3p)

5. Bestäm $\int_0^\pi \frac{\sin x}{3 + \cos^2 x} dx$ (3p)

6. Visa att $x + 2 \ln(x - 1) + \frac{3}{x - 1} \geq 5$ för $x > 1$. (4p)

7. Avgör om serien (4p)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \cos \frac{1}{n})$$

är konvergent eller divergent.

8. Visa att (4p)

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} \leq \frac{\pi}{6}$$

9. Bestäm den punkt (a, b) i högra halvplanet på kurvan (4p)

$y = e^{-x}$ som är sådan att arean av den triangel som bildas av koordinataxlarna och tangenten till kurvan i (a, b) blir så stor som möjligt.

10. Differentialkalkylens medelvärdessats hävdar att det under (4p)

vissa villkor på funktionen $f(x)$, definierad på intervallet $[a, b]$, finns en inre punkt ξ i intervallet så att tangenten till kurvan $y = f(x)$ i $x = \xi$ är parallell med den räta linjen mellan kurvans ändpunkter.

Ett av dessa villkor är att $f(x)$ måste vara deriverbar i det öppna intervallet $]a, b[$.

Förklara varför f dessutom måste vara kontinuerlig på det slutna intervallet $[a, b]$.