Institutionen för matematik
KTH, B Ek

Lösningar tentamen 5B1116 Matematik 2 för Bio1, K1, m.fl. 9 mars 2004

1. För att lösa systemet $\begin{cases} 7x+3y-z+u=2 \\ 12x+5y-2z+u=4 \\ 3x+y-z=1 \end{cases}$ ställer vi upp dess total-matris och använder elementära radoperationer:

$$\begin{pmatrix} 7 & 3 & -1 & 1 & | & 2 \\ 12 & 5 & -2 & 1 & | & 4 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & | & 1 \end{pmatrix} \overset{\substack{-2\cdot\text{rad3 till rad1,} \\ -4\cdot\text{rad3 till rad2}}}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & | & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & | & 1 \end{pmatrix} \overset{-3\cdot\text{rad1 till rad3}}{\Leftrightarrow}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -3 & | & 1 \end{pmatrix} \overset{2\cdot\text{rad2 till rad3}}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & | & 1 \end{pmatrix} \overset{\substack{1\cdot\text{rad3 till rad1 och rad2} \\ \text{sedan } -1\cdot\text{rad3}}}{\Leftrightarrow}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & -1 \end{pmatrix} \overset{-1\cdot\text{rad2 till rad1}}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & -1 \end{pmatrix}$$

z (utan ledande 1:a) väljs fritt $(=t)$, så fås x, y, u ur ekvationerna:

Svar: $\begin{cases} x=t \\ y=1-2t \\ z=t \\ u=-1 \end{cases}$ **,** t **godtyckligt.** (Andra, ekvivalenta, former är möjliga.)

2. Planet med ekvationen $4x-8y+z+2=0$ har normalvektorn $\mathbf{n}=(4,-8,1)$ och linjen $(x,y,z)=(2+t,3+t,-4+4t)$ har riktningsvektorn $\mathbf{v}=(1,1,4)$. Eftersom $\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}=4\cdot1-8\cdot1+1\cdot4=0$ är $\mathbf{v}$ vinkelrät mot $\mathbf{n}$ och linjen är parallell med planet (eller ligger i det).
Avståndet från punkten (x_0,y_0,z_0) till planet $Ax+By+Cz+D=0$ ges av $\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, så avståndet från punkten $(2,3,-4)$, som ligger på linjen, till planet är $\frac{|4\cdot2-8\cdot3+(-4)+2|}{\sqrt{4^2+(-8)^2+1^2}}=2$, så linjen ligger inte i planet och
Svar: De skär inte varandra, avståndet är 2 l.e.

3. Den sökta ökningstakten ges av riktningsderivatan $f'_{\mathbf{e}}=\mathbf{e}\cdot\nabla f$ i punkten. $\mathbf{e}$ är en **enhetsvektor** som pekar i den aktuella riktningen.
I vårt fall blir $\mathbf{e}=\frac{(2,1,-2)}{|(2,1,-2)|}=\frac{(2,1,-2)}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}}=\frac{1}{3}(2,1,-2)$ och med
$f(x,y,z)=\arctan(x-2y)-e^{yz}+x^2$ fås
$\nabla f(x,y,z)=(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z})=(\frac{1}{1+(x-2y)^2}+2x,\frac{-2}{1+(x-2y)^2}-e^{yz}z,-e^{yz}y)$, så riktningsderivatan blir $f'_{\mathbf{e}}=\mathbf{e}\cdot\nabla f(1,1,0)=\frac{1}{3}(2,1,-2)\cdot(\frac{1}{2}+2,-1-0,-1)=\frac{1}{3}(5-1+2)=2$
Svar: Funktionen ökar med 2 enheter per l.e.

4. Inversmatrisen till den kvadratiska matrisen A fås som lösningen X till ekvationen $AX = E$ (om den finns):

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 7 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{-2\cdot\text{rad4 till rad1 och rad2} \\ -3\cdot\text{rad4 till rad3} \\ \text{byt sedan rad1 och rad4}}}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & -5 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

$$\overset{\substack{-2\cdot\text{rad2 till rad3} \\ \text{byt sedan rad2 och rad3}}}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \overset{\substack{3\cdot\text{rad2 till rad3} \\ 5\cdot\text{rad2 till rad4}}}{\Leftrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & -5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 1 & -10 & 5 & 3 \end{array}\right) \overset{\substack{-2\cdot\text{rad3 till rad4} \\ \text{byt sedan rad3 och rad4}}}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & -5 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{\substack{3\cdot\text{rad3 till rad4} \\ \text{sedan } -1\cdot\text{rad3}}}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -5 & 0 & 4 \end{array}\right) \overset{\substack{-2\cdot\text{rad4 till rad1} \\ -1\cdot\text{rad4 till rad2}}}{\Leftrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3 & 2 & 0 & -6 & 10 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -3 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -5 & 0 & 4 \end{array}\right) \overset{\substack{-2\cdot\text{rad3 till rad1} \\ -1\cdot\text{rad3 till rad2}}}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3 & 0 & 0 & -4 & 10 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -5 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

$$\overset{-3\cdot\text{rad2 till rad1}}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -5 & 0 & 4 \end{array}\right), \text{ så}$$

Svar: Inversmatrisen $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & -5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

5. Punkten ligger på ytan, ty $(1, 2, 1)$ uppfyller ytans ekvation.
Låt $f(x, y, z) = x^2y + xy^2z + x^2z^3 - z^2$. Ytan är nivåyta till f, så en normalvektor till tangentplanet = en normalvektor till ytan i punkten = ∇f i punkten (om den inte är $\mathbf{0}$). Vi får $\nabla f = (2xy + y^2z + 2xz^3, x^2 + 2xyz, xy^2 + 3x^2z^2 - 2z)$ och $\nabla f(1, 2, 1) = (4+4+2, 1+4, 4+3-2) = 5(2, 1, 1)$, så vi kan ta normalvektorn $\mathbf{n} = (2, 1, 1)$ och en ekvation för planet blir $\mathbf{n}\cdot(x - 1, y - 2, z - 1) = 0$, dvs
Svar: En ekvation för tangentplanet är $2x + y + z - 5 = 0$.

6. Vi skriver den givna ekvationen $13x^2 + 6xy + 5y^2 = 28$ som $\mathbf{x}^T K\mathbf{x} = 28$, där $K = \left(\begin{smallmatrix} 13 & 3 \\ 3 & 5 \end{smallmatrix}\right)$ och $\mathbf{x} = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$.
För att identifiera kurvan byter vi till ett koordinatsystem där K är diagonal, dvs vi söker en ON transformationsmatris C som diagonaliserar K. Kolonnerna i C ges av ortonormerade egenvektorer till K, vi bestämmer först dem. Egenvärdena fås som rötter till den karakteristiska ekvationen:

$$0 = \det(K - \lambda E) = \begin{vmatrix} 13 - \lambda & 3 \\ 3 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 18\lambda + 56,$$

$$\text{så } \lambda_{1,2} = 9 \pm \sqrt{9^2 - 56} = \begin{cases} 14 \\ 4 \end{cases}$$

forts.

Motsvarande egenvektorer ges av lösningarna till $(K - \lambda E)\mathbf{v} = \mathbf{0}$:
För $\lambda_1 = 14$:
$\left(\begin{array}{cc|c} 13-14 & 3 & 0 \\ 3 & 5-14 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -9 & 0 \end{array}\right) \overset{3\cdot\text{rad1}}{\underset{\text{till rad2}}{\Leftrightarrow}} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, så
motsvarande egenvektor $\mathbf{v}_1 = k\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, normerad $\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.
För $\lambda_2 = 4$:
$\left(\begin{array}{cc|c} 13-4 & 3 & 0 \\ 3 & 5-4 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 9 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{-3\cdot\text{rad2}}{\underset{\text{till rad1}}{\Leftrightarrow}} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{array}\right)$, så
motsvarande egenvektor $\mathbf{v}_2 = k\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, normerad $\mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.
Transformationsmatrisen till den nya basen $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ blir $C = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.
Med koordinaterna (ξ, η) i den nya basen blir kurvans ekvation: $14\xi^2 + 4\eta^2 = 28$, så
Svar: Kurvans ekvation blir $(\frac{\xi}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{\eta}{\sqrt{7}})^2 = 1$, en ellips (med halvaxlar $\sqrt{7}$ och $\sqrt{2}$). Huvudaxelriktningarna är $(-1, 3)$ (storaxeln) och $(3, 1)$ (lillaxeln).

7. Vi har (eftersom f är differentierbar kan kedjeregeln användas)
$(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}(u,v)} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}(x,y)}\frac{\mathrm{d}(x,y)}{\mathrm{d}(u,v)} = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})\frac{\mathrm{d}(x,y)}{\mathrm{d}(u,v)}$.
Med $\begin{cases} u = x^4 - y^2 \\ v = xy \end{cases}$ blir $\frac{\mathrm{d}(u,v)}{\mathrm{d}(x,y)} = \begin{pmatrix} 4x^3 & -2y \\ y & x \end{pmatrix}$.
Då $(x, y) \neq (0, 0)$ får man $\frac{\mathrm{d}(x,y)}{\mathrm{d}(u,v)} = \frac{\mathrm{d}(u,v)}{\mathrm{d}(x,y)}^{-1} = \frac{1}{4x^4+2y^2}\begin{pmatrix} x & 2y \\ -y & 4x^3 \end{pmatrix}$.
Insättning ovan ger
Svar: $\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{1}{4x^4+2y^2}(x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y})$**.**
(Man kan räkna ”komponentvis” också: $\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$, men för att få fram $\frac{\partial x}{\partial u}$ och $\frac{\partial y}{\partial u}$ behövs ändå inversa funktionssatsen.)

8. Eftersom f är differentierbar överallt och det tillåtna området saknar rand finns alla lokala extrempunkter bland de stationära punkterna, dvs där $\nabla f = \mathbf{0}$.
$f(x, y) = x^2 - 2xy - 2y^2 + y^3$ ger $\nabla f = (2x - 2y, -2x - 4y + 3y^2)$, så de stationära punkterna är lösningarna till
$\begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ -2x - 4y + 3y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 3y(y-2) = 0 \end{cases}$, så stationära punkter är $(0, 0)$ och $(2, 2)$.
Med $A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$, $B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2$, $C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -4 + 6y$
ger ”andraderivatatestet” för tvåvariabelfunktioner:

Punkt	A	B	C	$AC - B^2$	$A \gtrless 0$	typ
$(0,0)$	2	-2	-4	-12		sadel, ty $AC - B^2 < 0$
$(2,2)$	2	-2	8	12	> 0	min, ty $AC - B^2 > 0, A > 0$

, så
Svar: f:s enda lokala extrempunkt är den lokala minimipunkten $(2, 2)$.

9. Eftersom $f(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + yz + z^2$ är kontinuerlig och den tillåtna mängden $x^2+y^2+z^2 \leq 1$ är kompakt och sammanhängande, antar f ett största och ett minsta värde och alla värden däremellan. Det gäller alltså att finna de största och minsta värdena som f antar. De är globala extrempunkter, så de finns bland de lokala extrempunkterna. Eftersom f är differentierbar överallt måste en lokal extrempunkt vara antingen en inre stationär punkt eller en stationär randpunkt.
Inre stationära punkter: Lösningar till $\nabla f = (4x, 2y+z, y+2z) = (0,0,0)$, så enda stationära inre punkten: $x = y = z = 0$ med $f(0,0,0) = 0$.
Stationära randpunkter: Randen ges av $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 = 0$ och enligt Lagranges multiplikatormetod (utan multiplikator) gäller i de stationära punkterna på randen att ∇f och ∇g är linjärt beroende, dvs parallella, dvs att $\nabla f \times \nabla g = \mathbf{0}$.
Man finner $\nabla f \times \nabla g = (4x, 2y+z, y+2z) \times (2x, 2y, 2z) = 2(2yz + z^2 - y^2 - 2yz, xy + 2xz - 4xz, 4xy - 2xy - xz) = 2(z^2 - y^2, x(y-2z), x(2y-z))$, så de stationära punkterna ges av

$$\begin{cases} y^2 = z^2 \\ x(y-2z) = 0 \\ x(2y-z) = 0 \\ x^2+y^2+z^2 = 1 \end{cases}, \text{ så } \textbf{antingen} \begin{cases} y = \pm z \\ x = 0 \\ x^2+y^2+z^2 = 1 \end{cases} \quad \textbf{eller} \begin{cases} y = \pm z \\ y - 2z = 0 \\ 2y - z = 0 \\ x^2+y^2+z^2 = 1 \end{cases}$$

I första fallet:
$(x,y,z) = \pm(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$ med $f(0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{3}{2}$, $f(0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \mp\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{2}$,
i andra fallet:
$(x,y,z) = (\pm 1, 0, 0)$ med $f(\pm 1, 0, 0) = 2$.
Så f:s största värde är 2 och dess minsta värde är 0, dvs
Svar: f antar alla värden i intervallet $[0,2]$.

10. Låt matrisen A ha $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ som radvektorer (enligt ledningen).
Det betraktade området avbildas då av den linjära avbildningen $\rho = A\mathbf{r}$, dvs $\xi = \mathbf{a}\cdot\mathbf{r}$, $\eta = \mathbf{b}\cdot\mathbf{r}$, $\zeta = \mathbf{c}\cdot\mathbf{r}$, på området

$$\xi^2 + \eta^2 \leq 2 \quad \text{och} \quad -1 \leq \zeta \leq 1,$$

dvs en rät cirkulär cylinder med radie $\sqrt{2}$ och höjd 2. Dess volym är $\pi\sqrt{2}^2 \cdot 2 = 4\pi$, så om den sökta volymen är V gäller $V|\det A| = 4\pi$. Men $\det A = \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$, så
Svar: Den sökta volymen är $\frac{4\pi}{|\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})|}$ v.e.