Institutionen för matematik.
KTH

Lösningar till tentamen i Matematik II, 5B1116, 5B1136 för Bio. E,I,K,ME, Media och OPEN, tisdagen den 13 april 2004.

1. Välj en punkt i planet $3x + 3y - z = 4$, exempelvis $\bar{a} = (0, 0, -4)$.
Planet har normalvektorn $\bar{n} = (3, 3, -1)$, som i normerad version blir $\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{19}}(3, 3, -1)$.
Projektionen av $\bar{a}$ på $\bar{n}$, $\bar{a}_{\bar{n}} = (\bar{a} \cdot \hat{n})\hat{n} = ((0, 0, -4) \cdot \frac{1}{\sqrt{19}}(3, 3, -1))\hat{n} = \frac{4}{\sqrt{19}}\hat{n}$.
Det sökta avståndet är projektionens längd , $|\bar{a}_{\bar{n}}| = \underline{\dfrac{4}{\sqrt{19}}}$

2. Gausselimination ger:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & a & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & a & 5 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & a & 5 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & 7 & 5 & 5 \\ 0 & 8 & 3+a & 11 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 5/7 & 5/7 \\ 0 & 8 & 3+a & 11 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 5/7 & 5/7 \\ 0 & 0 & -19/7+a & 37/7 \end{array}\right]$$

Man ser att tredje raden i sista systemet är en nollrad då $a = 19/7$, vilket svarar mot att systemdeterminanten då är $= 0$.
Eftersom högerledet är skilt från 0 i tredje ekvationen $\underline{\text{saknar systemet lösning för } a = \dfrac{19}{7}}$

.

3. Den sökta riktningsderivatan $u'_{\hat{v}}(1, 2, -2)$ bestäms med formeln
$u'_{\hat{v}}(P) = \text{grad } u(P) \cdot \hat{v}$, där $P = (1, 2, -2)$ och $\hat{v} = \bar{v}/|\bar{v}| = (2, 3, 6)/7$.
$\text{grad } u(x, y, z) = \text{grad } (\dfrac{x}{x^2 + y^2 + z^2}) =$
$(\dfrac{1 \cdot (x^2 + y^2 + z^2) - 2x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}, \quad \dfrac{-2xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}, \quad \dfrac{-2xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^2})$.
$\text{grad } u(1, 2, -2) = (\dfrac{9-2}{9^2}, \dfrac{-4}{9^2}, \dfrac{4}{9^2}) = (7, -4, 4)/81.$
Alltså, $u'_{\hat{v}}(1, 2, -2) = \dfrac{1}{81}(7, -4, 4) \cdot \dfrac{1}{7}(2, 3, 6) = \dfrac{1}{81 \cdot 7}(14 - 12 + 24) = \underline{\dfrac{26}{567}}.$

V.g. vänd!

4.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ ger } A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ och } B = A^T A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 13 \end{pmatrix}$$

$B : s$ egenvärden bestäms av karakteristiska ekvationen:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 13-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Man får : $(2-\lambda)(13-\lambda) - 1 = \lambda^2 - 15\lambda + 25 = 0$, varav

$\lambda = 15/2 \pm \sqrt{(15/2)^2 - 25} = 15/2 \pm \sqrt{125/4} = 15/2 \pm 5\sqrt{5}/2$.
Största egenvärdet $\lambda_{max} = \dfrac{15+5\sqrt{5}}{2}$ ger matrisnormen $||A|| = \sqrt{\lambda_{max}} =$ $\underline{\sqrt{\dfrac{15+5\sqrt{5}}{2}}}$ som kan visas vara lika med $\underline{\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}}$.

5. Beräkning av determinanten längs andra raden ger:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 6 & -7 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-2) \begin{vmatrix} 2 & 6 & -7 \\ 0 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} + (-3) \begin{vmatrix} 3 & 2 & -7 \\ 3 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$(-2)(2(-1-0) - 6(0-10) + (-7)(0+2)) + (-3)(3(0-10) - 2(3-10) +$
$(-7)(6-0)) = (-2)44 + (-3)(-58) = -88 + 174 = \underline{86}$.

6. Kurvan $\bar{r} = (x(t), y(t), z(t))$ har tangentvektorer av typen $\bar{r}' = (x'(t), y'(t), z'(t))$.
Den givna kurvan $\bar{r} = (-t\cos \pi t, t \sin \pi t, t)$ har alltså tangentvektorerna
$\bar{r}' = (-\cos \pi t + (-t)\pi(-\sin \pi t), \quad \sin \pi t + t(\pi)\cos \pi t, \quad 1)$
Tangentvektorn i punkten $(1, 0, 1)$ (som svarar mot $t = 1$) är alltså
$\bar{T} = \bar{r}'(1) = (-(-1) + 0, \quad 0 + \pi(-1), \quad 1) = (1, -\pi, 1)$.
Normalvektorer till ytan $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0$ fås som
grad $F = (F_x, F_y, F_z) = (2x, 2y, -2z)$.
Normalvektorn till ytan i punkten $(1, 0, 1)$ (som ligger på ytan) blir alltså
$\bar{n} =$ grad $F(1, 0, 1) = (2, 0, -2)$.
$\bar{T}$ och $\bar{n}$ är vinkelräta eftersom $\bar{T} \cdot \bar{n} = (2, 0, -2) \cdot (1, -\pi, 1) = 2 + 0 - 2 = 0$.

Förklaringen är att kurvan ligger inbäddad i ytan. (forts.)

(**6.** forts.) Insättning av kurvans $x-, y-$ och $z-$komponenter i ytans ekvation $z^2 = x^2 + y^2$ ger
$t^2 = (-t)^2 \cos^2 \pi t + t^2 \sin^2 \pi t = t^2(\cos^2 \pi t + \sin^2 \pi t) = t^2$, dvs ekvationen är identiskt uppfylld, vilket visar att varje punkt på kurvan ligger i ytan.
Eftersom ytan är differentierbar (utanför origo) finns ett tangentplan till ytan i punkten $(1, 0, 1)$. Kurvans tangent $\bar{T}$ ligger då i detta tangentplan och är alltså vinkelrät mot normalvektorn $\bar{n}$ som är vinkelrät mot tangentplanet.

7a. Det underbestämda linjära systemet

$$\begin{aligned} F(x,y,z) &= 2x - 4y + 3z &= 1 \\ G(x,y,z) &= 3x - 5y + 4z &= 2 \end{aligned} \quad \text{kan skrivas om på formen} \quad \begin{aligned} 2x + 3z &= 1 + 4y \\ 3x + 4z &= 2 + 5y \end{aligned}$$

där y betraktas som en parameter i högerledet.
Man ser att x och z kan lösas ut som funktioner av y om systemdeterminanten i högra systemet är skild från 0.

$$\text{Determinanten är} \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 9 = -1 \neq 0.$$

Alltså kan x och z lösas som funktioner av y ur systemet.
Att punkten $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ är en lösning (av oändligt många) till systemet framgår av direkt insättning:
$x = y = z = 1$ ger i första ekvationen:$2 - 4 + 3 = 1$ och i andra ekvationen $3 - 5 + 4 = 1$.

Notera att den betraktade systemdeterminanten kan skrivas som determinanten för en delmatris till systemets Jacobimatris:
$|\dfrac{d(F,G)}{d(x,z)}| = -1 \neq 0.$

7b. Sätt $P(x, y, z) = 2x - 4y + 3z^2$ och $Q(x, y, z) = 3x - 5y + 4z$.
Det givna olinjära systemet kan då skrivas
$P(x, y, z) = 1$
$Q(x, y, z) = 2.$ Man ser att $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ är en lösning även till detta system.
Enligt Implicita funktionssatsen (P och Q är differentierbara) har detta system en lösning av typen $x = x(y), z = z(y)$ i en omgivning av punkten $(1, 1, 1)$ om determinanten $|\dfrac{d(P,Q)}{d(x,z)}|$ i punkten $(1, 1, 1)$ är skild ifrån 0.
Man får $P_x = 2, \quad P_z = 6z = 6$ i $(1, 1, 1)$.
$Q_x = 3, \quad Q_z = 4$, vilket ger

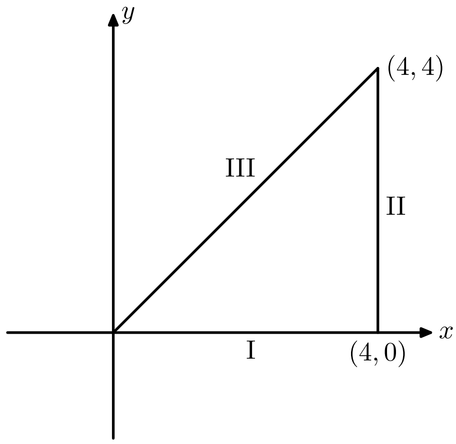
V.g. vänd!

(**7b.** forts.)

$$\left|\frac{d(P,Q)}{d(x,z)}(1.1.1)\right| = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 18 = -10 \neq 0.$$

Därför kan man lösa ut $x(y)$ och $z(y)$ ur systemet i en omgivning av punkten $(1, 1, 1)$.

8. Funktionen $f(x, y) = x^2 - 2\, e^{xy-y^2}$ skall undersökas på den slutna triangeln definierad av $0 \leq y \leq x \leq 4$.
Eftersom området är slutet och begränsat och funktionen f är kontinuerlig , vet man att det finns ett största och ett minsta värde för f på området. Vi börjar med att undersöka om det finns några stationära punkter i det inre av triangeln.



Inre punkter.

$$(1) \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2y\, e^{xy-y^2} \qquad = 0$$

$$(2) \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -2(x - 2y)\, e^{xy-y^2} \quad = 0$$

(2) ger $x = 2y$, vilket insatt i (1) ger $2y(2 - e^{y^2}) = 0$, vilket i sin tur har lösningarna $y = 0$ (ger ingen inre punkt) samt $y = \pm\sqrt{\ln 2}$, vilket ger $(x, y) = (2\sqrt{\ln 2}, \sqrt{\ln 2})$
som enda stationära inre punkt. (Punkten ligger inom triangeln eftersom $\ln 2 < 1$. $\quad y = -\sqrt{\ln 2}$ ger en punkt utanför triangeln).
Punkten har funktionsvärdet $f(2\sqrt{\ln 2}, \sqrt{\ln 2}) = 4\ln 2 - 2e^{\ln 2} = 4(\ln 2 - 1)$
Notera att detta värde ligger mellan -4 och 0, eftersom $0 < \ln 2 < 1$.

Rand I : $y = 0,\ 0 \leq x \leq 4$.

Sätt $f(x, 0) = g(x) = x^2 - 2$. $\quad g'(x) = 2x$, dvs det finns ingen stationär punkt i det inre av rand I.

(**8. forts.**)
Rand II : $x = 4,\ 0 \leq y \leq 4.$

Sätt $f(4, y) = h(y) = 16 - 2\,e^{4y-y^2}$. $h'(y) = -2(4-2y)\,e^{4y-y^2} = 0$ för $y = 2$. Man får den stationära punkten $(4, 2)$ på rand II med $f(4, 2) = 16 - 2\,e^4$.
Rand III : $y = x,\ 0 \leq x \leq 4.$

Sätt $j(x) = f(x, x) = x^2 - 2 = g(x)$. Inga stationära inre punkter på rand III.

Hörnen.

$f(0, 0) = -2, \quad f(4, 0) = 14, \quad f(4, 4) = 14.$

Jämförelse mellan de fem intressanta punkterna ger:
$f_{max} = f(4, 0) = f(4, 4) = 14. \quad f_{min} = f(4, 2) = 16 - 2\,e^4.$

Anm:$16 - 2\,e^4 < -16$, eftersom $e > 2$ och alltså $2\,e^4 > 2 \cdot 2^4 = 32$.

9. Den ortogonala projektionen av en punkt (x, y, z) på planet $x+2y-z = 0$ kan skrivas :
(*) $\qquad (u, v, w) = (x, y, z) + t(1, 2, -1),$
eftersom $\bar{n} = (1, 2, -1)$ är en normalvektor till planet.
Notera att parametern t här beror av (x, y, z). Villkoret att $(u, v, w) = (x + t, y + 2t, z - t)$ skall ligga i planet ger:
$u + 2v - w = (x + t) + 2(y + 2t) - (z - t) = 0$, dvs. $6t + x + 2y - z = 0$,
(**) $\qquad t = (-x - 2y + z)/6).$
Insättning av (**) i (*) ger:
$(u, v, w) = (x, y, z) + ((-x - 2y + z)/6)(1, 2, -1) =$
$(x+(-x-2y+z)/6, \quad y+2(-x-2y+z)/6, \quad z+(-1)(-x-2y+z)/6) =$
$(5x/6 - y/3 + z/6, \quad -x/3 + y/3 + z/3, \quad x/6 + y/3 + 5z/6).$

På matrisform: $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x/6 - y/3 + z/6 \\ -x/3 + y/3 + z/3 \\ x/6 + y/3 + 5z/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/6 & -1/3 & 1/6 \\ -1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/6 & 1/3 & 5/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

varav man ser att den efterfrågade matrisen är:

$$\begin{pmatrix} 5/6 & -1/3 & 1/6 \\ -1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/6 & 1/3 & 5/6 \end{pmatrix}.$$

V.g. vänd!

9. (forts.)
Anm: Motsvarande projektion på planet $z = 0$ (xy-planet) utföres av matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Man kan alltså också lösa problemet genom att först göra en ortogonal koordinattransformation så att det givna planet avbildas på xy-planet. Därefter undersöker man vilken matris i det gamla systemet som transformeras till A i det nya systemet. (Se Ex. 7.8, s.209 i LGA).

10a. En matris A är symmetrisk om $A^T = A$.
Vi undersöker $B^T B$ och utnyttjar att $(GH)^T = H^T G^T$.

$$(B^T B)^T = B^T (B^T)^T = B^T B \qquad \text{(eftersom} \quad (B^T)^T = B)$$

Alltså är $A = B^T B$ symmetrisk.

10b. Låt λ vara ett godtyckligt egenvärde till $A = B^T B$ och $\bar{v}$ en motsvarande egenvektor. ($\bar{v} \neq \bar{0}$).
Man har då

$$(*) \qquad B^T B \bar{v} = \lambda \bar{v}$$

Bilda nu $|B\bar{v}|^2$ som ju är ≥ 0:

$$|B\bar{v}|^2 = (B\bar{v})^T (B\bar{v}) = (\bar{v}^T B^T)(B\bar{v}) = \bar{v}^T B^T B \bar{v} = (\text{enl. } (*)\ ) = \bar{v}^T \lambda \bar{v} = \lambda \bar{v}^T \bar{v} = \lambda |\bar{v}|^2.$$

Alltså, $|B\bar{v}|^2 = \lambda |\bar{v}|^2$.
Eftersom $|B\bar{v}|^2 \geq 0$ och $|\bar{v}|^2 > 0$ måste $\lambda \geq 0$. VSV.