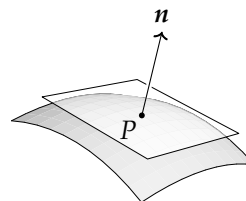


1. Tangentplanet till ytan $f(x, y, z) = e^z + zy^2 - x + y = 0$ i punkten $(2, 1, 0)$ har ytans gradient som normal

$$\nabla f(2, 1, 0) = (f'_x, f'_y, f'_z) \bigg|_{\substack{x=2 \\ y=1 \\ z=0}} = (-1, 2zy + 1, e^z + y^2) \bigg|_{\substack{x=2 \\ y=1 \\ z=0}} = (-1, 1, 2).$$



Eftersom vi har tangentplanets normal $\mathbf{n} = \nabla f(2, 1, 0)$ och en punkt $P = (2, 1, 0)$ i planet (tangeringspunkten) så kan vi ställa upp planets ekvation $\mathbf{n} \cdot ((x, y, z) - P) = 0$,

$$(-1, 1, 2) \cdot ((x, y, z) - (2, 1, 0)) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -x + y + 2z = -1.$$

2. Vi skriver ekvationen i matrisform

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 8.$$

Huvudaxelformen av ekvationen är $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 = 8$ där λ_1 och λ_2 är egenvärden till matrisen $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$. Egenvärdena ges av den karakteristiska ekvationen

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 4 \\ 4 & -3 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 25 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \pm 5.$$

Huvudaxelformen är alltså $5x'^2 - 5y'^2 = 8$.

3. Sambandet mellan funktionen f uttryckt som funktion av variablerna x och y respektive u och v kan antingen skrivas som

$$f(x, y) = f(u(x, y), v(x, y)) \quad \text{eller som} \quad f(x(u, v), y(u, v)) = f(u, v).$$

I vänsterledet är f en funktion av variablerna x , y och i högerledet en funktion av u , v . Med hjälp av kedjeregeln kan vi derivera båda led i något av sambanden och få ett samband mellan partialderivatorna f'_x , f'_y och f'_u , f'_v .

I vårt fall är variabelbytet $x = u + 2v$, $y = 2u - v$ givet i formen $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ och då är formen $f(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$ naturligare att arbeta med. Derivering ger

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} + 2 \frac{\partial f}{\partial y}, \\ \frac{\partial f}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} = 2 \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}. \end{aligned}$$

Från dessa samband ser vi direkt att $\frac{\partial f}{\partial x} + 2 \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}$.

4. Vi kallar vektorerna $\mathbf{u}_1 = (1, 0, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (2, 1, 1)$, $\mathbf{u}_3 = (0, 1, -1)$ och $\mathbf{u}_4 = (1, 1, 0)$. Vektorerna $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$ pekar inte i samma riktning (det finns ingen skalär k sådan att $\mathbf{u}_1 = k\mathbf{u}_2$) och

spänner därför upp ett plan. Eftersom tre vektorer är parallella med samma plan om deras trippelprodukt är noll så visar uträkningarna

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_3 \cdot (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2) &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \{\text{Sarrus}\} = 0 - 1 + 2 - 0 - 0 - 1 = 0, \\ \mathbf{u}_4 \cdot (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \{\text{Sarrus}\} = 0 + 0 + 2 - 0 - 1 - 1 = 0, \end{aligned}$$

att $\mathbf{u}_3$ och $\mathbf{u}_4$ är parallella med planet som $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$ spänner upp, d.v.s. de fyra vektorerna är parallella med ett och samma plan.

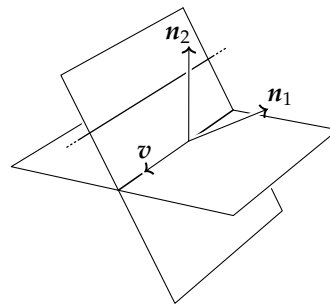
Anm. Alternativt kan man ganska enkelt se att $\mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_2 - 2\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_4 = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1$, vilket visar att $\mathbf{u}_3$ och $\mathbf{u}_4$ är linjärkombinationer av $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$, d.v.s. $\mathbf{u}_3$ och $\mathbf{u}_4$ är parallella med planet som spänns upp av $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$.

5. Metod 1

Om den sökta linjen ska ligga i det första planet och samtidigt inte skära det andra planet så måste linjen vara parallell med planens skärningslinje.

Eftersom skärningslinjen tillhör båda planen har den en riktning $\mathbf{v}$ som är vinkelrät mot planens normaler, d.v.s. parallell med normalernas kryssprodukt. Från planens ekvationer kan vi avläsa deras normaler (koefficienterna framför x , y och z) $\mathbf{n}_1 = (1, 3, -5)$ respektive $\mathbf{n}_2 = (-1, 2, -3)$, och får att

$$\mathbf{v} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = (1, 3, -5) \times (-1, 2, -3) = (1, 8, 5).$$



Detta är alltså vår sökta linjes riktning. Vi får en punkt på linjen genom att välja en punkt som uppfyller det första planets ekvation $x + 3y - 5z = 7$ men inte det andra planets ekvation $-x + 2y - 3z = 5$, t.ex. $(x, y, z) = (1, 2, 0)$. Nu kan vi skriva upp en parametrisering av den sökta linjen

$$(x, y, z) = (1, 2, 0) + t(1, 8, 5) \quad (t \text{ parameter}).$$

Metod 2

Välj den sökta linjen som skärningslinjen mellan planen

$$\begin{cases} x + 3y - 5z = 7 \\ -x + 2y - 3z = C \end{cases} \quad (*)$$

där $C \neq 5$. Då får vi nämligen en linje som ligger i det förstnämnda planet (uppfyller dess ekvation) men inte i det andra planet eftersom alla dess punkter uppfyller $-x + 2y - 3z = C \neq 5$. Med t.ex. $C = 0$ ger gausseliminering av $(*)$,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -5 & 7 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \end{array} \right) \begin{matrix} \oplus \\ \leftarrow \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 5 & -8 & 7 \end{array} \right) \begin{matrix} \\ \odot \frac{1}{5} \end{matrix} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & -\frac{8}{5} & \frac{7}{5} \end{array} \right) \begin{array}{c} \leftarrow \\ \circlearrowleft \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{14}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{8}{5} & \frac{7}{5} \end{array} \right)$$

Lösningen avläser vi till

$$\begin{cases} x = \frac{14}{5} + \frac{1}{5}t \\ y = \frac{7}{5} + \frac{8}{5}t \\ z = t \end{cases}$$

så linjens parametrisering är $(x, y, z) = (\frac{14}{5} + \frac{1}{5}t, \frac{7}{5} + \frac{8}{5}t, t) = (\frac{14}{5}, \frac{7}{5}, 0) + t(\frac{1}{5}, \frac{8}{5}, 1)$.

Anm. Det finns många korrekta svar till denna uppgift. En linje $(x_0, y_0, z_0) + t(\alpha, \beta, \gamma)$ är ett korrekt svar om $x_0 + 3y_0 - 5z_0 = 7$, $-x_0 + 2y_0 - 3z_0 \neq 5$ och om riktningsvektorn (α, β, γ) är parallell med vektorn $(1, 8, 5)$.

6. Satsen om inversa funktioner säger att funktionen har en lokal differentierbar invers kring punkten $(0, 0, 0)$ om

$$\det\left(\frac{\partial f}{\partial(x, y, z)}\right) \neq 0$$

när $x = y = z = 0$. I detta fall blir Jacobimatrisen

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial(x, y, z)} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(\cos xy + e^{2z}) & \frac{\partial}{\partial y}(\cos xy + e^{2z}) & \frac{\partial}{\partial z}(\cos xy + e^{2z}) \\ \frac{\partial}{\partial x}(x^2y + \sin y + \sin z) & \frac{\partial}{\partial y}(x^2y + \sin y + \sin z) & \frac{\partial}{\partial z}(x^2y + \sin y + \sin z) \\ \frac{\partial}{\partial x}(x + xy + xyz) & \frac{\partial}{\partial y}(x + xy + xyz) & \frac{\partial}{\partial z}(x + xy + xyz) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -y \sin xy & -x \sin xy & 2e^{2z} \\ 2xy & x^2 + \cos y & \cos z \\ 1 + y + yz & x + xz & xy \end{pmatrix} \end{aligned}$$

och determinanten av denna matris när $x = y = z = 0$ är

$$\det\left(\frac{\partial f}{\partial(x, y, z)}\right) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{c} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot 1 \cdot 2 = -2 \neq 0.$$

Den lokala inversfunktionens Jacobimatis får vi som inversmatrisen av f 's Jacobimatis i punkten,

$$\frac{\partial f^{-1}}{\partial(u, v, w)} = \left(\frac{\partial f}{\partial(x, y, z)}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Matrisinversen i högerledet beräknar vi med ett räknescema,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{c} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{smallmatrix} \right)} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Alltså är Jacobimatrisen för inversfunktionen i punkten som svarar mot $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ lika med

$$\frac{\partial f^{-1}}{\partial(u, v, w)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. En diagonalisering av A med ON-matriser får vi genom att utföra följande steg:

1. Bestäm matrisen A 's egenvärden.
2. För varje egenvärde bestämmer vi ortonormala egenvektorer.
3. Själva diagonaliseringen av A består av att ställa upp basbytesformeln

$$A = C D C^T$$

där C är basbytesmatrisen som transformerar koordinater i ett ON-system där de ortonormala egenvektorer är nya koordinataxelriktningar till koordinater i standardbasen. Matrisen D är en diagonalmatris med A 's egenvärden på diagonalen och svarar mot samma linjära avbildning som A men när koordinaterna är uttryckta i det nya ON-systemet.

Vi börjar med den första punkten.

1. Egenvärdena till matrisen A ges av den karakteristiska ekvationen

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -1 - \lambda & 3 & -3 \\ 3 & -1 - \lambda & 3 \\ -3 & 3 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 24\lambda - 28 = 0.$$

Genom prövning ser vi att $\lambda = 2$ är en rot till ekvationen och det betyder att det karakteristiska polynomet kan faktoriseras till

$$-\lambda^3 - 3\lambda^2 + 24\lambda - 28 = -(\lambda - 2)(\lambda^2 + A\lambda + B).$$

Multiplikerar vi ihop högerledet kan vi bestämma de okända konstanterna A och B genom att identifiera koefficienterna i båda led

$$= -\lambda^3 + (-A + 2)\lambda^2 + (2A - B)\lambda + 2B \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -A + 2 = -3 \\ 2A - B = 24 \\ 2B = -28 \end{cases}$$

vilket ger att $A = 5$ och $B = -14$. Den karakteristiska ekvationen kan därmed skrivas

$$-(\lambda - 2)(\lambda^2 + 5\lambda - 14) = 0$$

och de två andra rötterna till den karakteristiska ekvationen är lösningar till andragradsekvationen

$$\lambda^2 + 5\lambda - 14 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 2 \quad \text{eller} \quad \lambda = -7.$$

Matrisen A har alltså egenvärdena $\lambda_1 = -7$ och $\lambda_2 = 2$ (dubbelrot).

2. Egenvektorerna får vi genom att lösa egenvektorekvationen $Ax = \lambda x$ för respektive egenvärde λ .

$\lambda = -7$: Ekvationen är $Ax = -7x$ d.v.s. $(A + 7E)x = 0$, och gausseliminering ger

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 & | & 0 \\ 3 & 6 & 3 & | & 0 \\ -3 & 3 & 6 & | & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \textcircled{-\frac{1}{2}} \textcircled{\frac{1}{2}} \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 & | & 0 \\ 0 & \frac{9}{2} & \frac{9}{2} & | & 0 \\ 0 & \frac{9}{2} & \frac{9}{2} & | & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \textcircled{\frac{1}{6}} \\ \textcircled{-} \textcircled{\frac{2}{9}} \\ \leftarrow \end{matrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \textcircled{-\frac{1}{2}} \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Lösningarna avläser vi till

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (t \text{ parameter}).$$

$\lambda = 2$: Vi löser systemet $Ax = 2x$, d.v.s. $(A - 2E)x = 0$, med gausseliminering

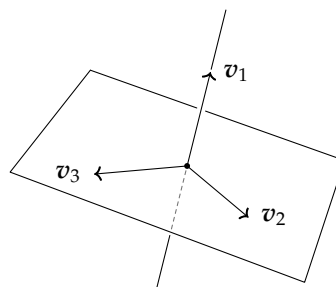
$$\begin{pmatrix} -3 & 3 & -3 & | & 0 \\ 3 & -3 & 3 & | & 0 \\ -3 & 3 & -3 & | & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \textcircled{+} \textcircled{-} \textcircled{-\frac{1}{3}} \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Lösningarna är

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s - t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (s, t \text{ parametrar}).$$

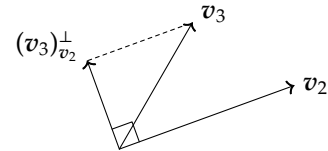
Situationen är alltså att vi har ett egenvärde -7 med egenvektorer som spänns upp av $v_1 = (1, -1, 1)$ och ett egenvärde 2 med egenvektorer som alla spänns upp av $v_2 = (1, 1, 0)$ och $v_3 = (-1, 0, 1)$.

Eftersom matrisen A är symmetrisk vet vi från spektralsatsen att egenvektorer som svarar mot olika egenvärden är vinkelräta, d.v.s. att egenvektorn v_1 är vinkelrät mot v_2 och v_3 . Däremot behöver inte v_2 och v_3 , som tillhör samma egenrum, nödvändigtvis vara vinkelräta. Så om vi vill få fram



tre ortonormala egenvektorer kan vi välja v_1 tillsammans med två vinkelräta vektorer i planet som v_2 och v_3 spänner upp (som automatiskt kommer vara egenvektorer eftersom de är linjärkombinationer av v_2 och v_3) och sedan normera dessa.

Vi får två vinkelräta vektorer i planet som v_2 och v_3 spänner upp genom att t.ex. ersätta v_3 med dess komposant $(v_3)_{v_2}^\perp$ som är vinkelrät mot v_2 ,



$$\begin{aligned}(v_3)_{v_2}^\perp &= v_3 - (v_3)_{v_2} = v_3 - \frac{v_3 \cdot v_2}{|v_2|^2} v_2 \\ &= (-1, 0, 1) - \frac{(-1, 0, 1) \cdot (1, 1, 0)}{|(1, 1, 0)|^2} (1, 1, 0) \\ &= (-1, 0, 1) - \frac{-1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0}{1^2 + 1^2 + 0^2} (1, 1, 0) = (-1, 0, 1) - \frac{-1}{2} (1, 1, 0) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1).\end{aligned}$$

Tre ortonormala egenvektorer är

- $\frac{v_1}{|v_1|} = \frac{(1, -1, 1)}{|(1, -1, 1)|} = \frac{(1, -1, 1)}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)$
- $\frac{v_2}{|v_2|} = \frac{(1, 1, 0)}{|(1, 1, 0)|} = \frac{(1, 1, 0)}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$
- $\frac{2(v_3)_{v_2}^\perp}{|2(v_3)_{v_2}^\perp|} = \frac{(-1, 1, 2)}{|(-1, 1, 2)|} = \frac{(-1, 1, 2)}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 1, 2)$

3. Basbytesmatrisen C ska transformera koordinater givna i egenvektorbasen till koordinater i standardbasen och har därför de ortonormala egenvektorerna som kolonner

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Diagonalmatrisen D har egenvärdena som diagonalelement uppskrivna i samma ordning som egenvektorerna i C ,

$$D = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Diagonaliseringen är alltså

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}^T.$$

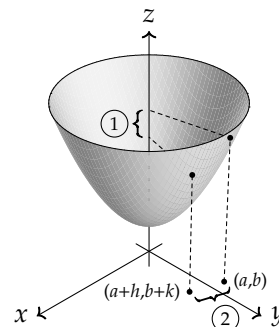
8. En kort sammanfattning av de tre begreppen *kontinuitet*, *differentierbarhet* och *partiella derivator*.

- Kontinuitet. Funktionen f är kontinuerlig i punkten (a, b) om

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + R(h, k)$$

där resttermen $R(h, k) \rightarrow 0$ när $h, k \rightarrow 0$.

Funktionsvärden i närliggande punkter $(a+h, b+k)$ konvergerar mot funktionsvärdet i punkten (a, b) när $h, k \rightarrow 0$. I figuren till höger betyder det att avståndet ① går mot noll när avståndet ② går mot noll.



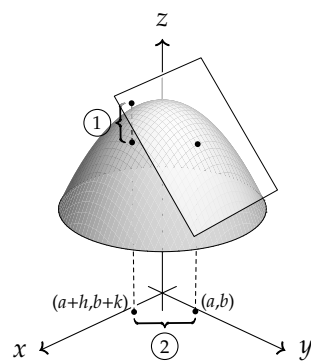
- Differentierbarhet. Funktionen f är differentierbar i punkten (a, b) om

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + f'_x(a, b)h + f'_y(a, b)k + R(h, k)$$

där resttermen $R(h, k)$ går mot noll fortare än de linjära termerna när $h, k \rightarrow 0$, d.v.s.

$$\frac{R(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} \rightarrow 0 \quad \text{när } h, k \rightarrow 0.$$

Innebörden är att funktionsvärdena approximeras väl av linjariseringen i närheten av punkten (a, b) . Så pass väl att avstånd ① i figuren till höger går mot noll snabbare än avstånd ② (d.v.s. kvoten $\text{①}/\text{②} \rightarrow 0$).



- Partialderivator. Funktionen f har partialderivatan $f'_x(a, b)$ i punkten (a, b) om

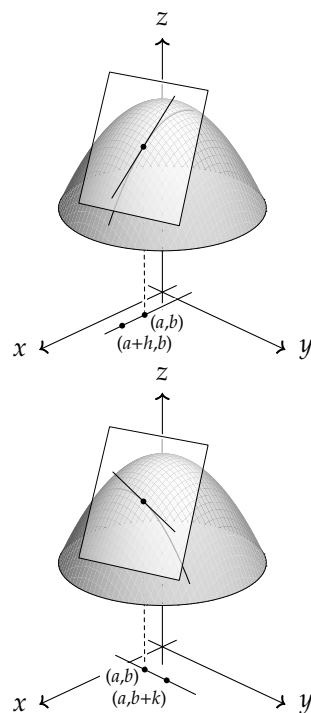
$$f(a+h, b) = f(a, b) + f'_x(a, b)h + R(h)$$

där resttermen $R(h)/h \rightarrow 0$ när $h \rightarrow 0$. Detta är samma villkor som differentierbarhet: linjariseringen approximerar funktionen väl. Skillnaden är att approximationen i detta fall bara behöver vara god när $(a+h, b+k)$ närmar sig (a, b) med $k = 0$, d.v.s. parallellt med x -axeln.

På motsvarande sätt har f partialderivatan $f'_y(a, b)$ i punkten (a, b) om

$$f(a, b+k) = f(a, b) + f'_y(a, b)k + R(k)$$

där resttermen $R(k)/k \rightarrow 0$ när $k \rightarrow 0$.



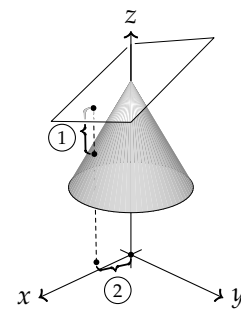
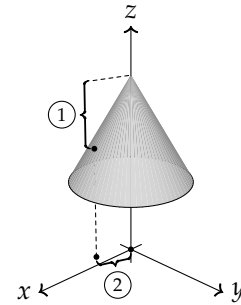
- a) Falskt. Ett motexempel är funktionen

$$f(x, y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$$

som är kontinuerlig i origo $(x, y) = (0, 0)$ men inte differentierbar där.

Funktionen är kontinuerlig i origo. (I figuren till höger går avstånd ① mot noll när avstånd ② går mot noll.)

Däremot är funktionen inte differentierbar. Funktionsytan har en spets i origo och approximeras därför dåligt av ett plan (linjär funktion) kring origo. (I den andra figuren till höger går avstånd ① inte snabbare mot noll än avstånd ② oavsett hur planet väljs.)

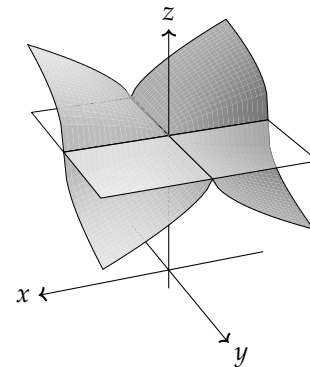


- b) Falskt. Som motexempel kan vi välja funktionen

$$f(x, y) = 1 - \sqrt[3]{x^2 y}$$

som har partialderivator $f'_x(0, 0) = 0$ och $f'_y(0, 0) = 0$ i origo men är inte differentierbar där.

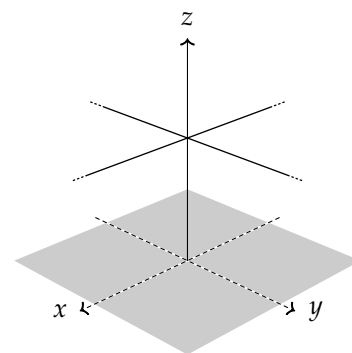
Funktionen approximeras dåligt av tangentplanet i origo (ej differentierbar) förutom längs koordinataxlarna där funktionen "rår" vara konstant lika med 1 (en konstant funktion har partialderivator).



- c) Falskt. Betrakta funktionen

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{om } x = 0 \text{ eller } y = 0 \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

Denna funktion har partialderivator $f'_x(0, 0) = 0$ och $f'_y(0, 0) = 0$ i origo men är inte kontinuerlig där. Om vi låter $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ med $x \neq y$ så är $f(x, y) = 0$ hela tiden och konvergerar inte mot $f(0, 0) = 1$ (ej kontinuerlig). Däremot är funktionen konstant lika med 1 på koordinataxlarna och har därför partialderivator i origo.



- d) Sant. Om funktionen f är differentierbar i punkten (a, b) så gäller att

$$f(a + h, b + k) = f(a, b) + f'_x(a, b)h + f'_y(a, b)k + R(h, k)$$

där $\frac{R(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} \rightarrow 0$ när $h,k \rightarrow 0$. Genom att betrakta den gråa boxen som ny restterm

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + R_2(h, k)$$

så har vi att $R_2(h, k) = f'_x(a, b)h + f'_y(a, b)k + R(h, k) \rightarrow 0$ när $h, k \rightarrow 0$, d.v.s. f är kontinuerlig i punkten (a, b) .

9. Problemet kan formuleras som ett extremproblem:

Bestäm den punkt som maximerar $f(x, y) = y$ när $g(x, y) = x^2 + 2xy + 4y^2 - 6 = 0$.

Det är inte säkert att detta problem har en lösning. Det finns möjligheten att kurvan är obegränsad så att det går att välja punkter med godtyckligt stor y -koordinat. I detta fall är kurvan en andragradskurva och vi kan avgöra vilken typ av kurva vi har genom att skriva om den i huvudaxelform. Ekvationen $x^2 + 2xy + 4y^2 = 6$ blir i matrisform

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 6$$

och egenvärdena till matrisen i vänsterledet ges av dess karakteristiska ekvation

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda) - 1 = \lambda^2 - 5\lambda + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{13}.$$

Huvudaxelformen är alltså

$$\left(\frac{5}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{13}\right)x'^2 + \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{13}\right)y'^2 = 6$$

och eftersom $\frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{13} > 0$ (ty $5 = \sqrt{25} > \sqrt{13}$) så är kurvan en ellips och därmed begränsad.

Vi har alltså en kompakt kurva och funktionen f antar därför ett största värde på kurvan. Enligt Lagranges multiplikatormetod antas detta största värde i en av följande typer av punkter

1. Punkter som uppfyller Lagrangevillkoret, d.v.s. att ∇f är parallell med ∇g .
2. Singulära punkter på kurvan, d.v.s. där $\nabla g = (0, 0)$.

Vi undersöker båda dessa fall.

1. Parallellitetsvillkoret betyder att det ska finnas en konstant λ så att $\nabla f = \lambda \nabla g$, d.v.s. $(0, 1) = \lambda(2x + 2y, 2x + 8y)$. Detta ger oss ekvationssystemet

$$\lambda(2x + 2y) = 0, \tag{1}$$

$$\lambda(2x + 8y) = 1, \tag{2}$$

$$x^2 + 2xy + 4y^2 = 6. \tag{3}$$

Ekvation (1) ger två fall.

$\lambda = 0$: Då kan inte (2) vara uppfylld eftersom vänsterledet blir noll.

$x = -y$: Ersätter vi x med $-y$ i ekvation (3) fås

$$y^2 - 2y^2 + 4y^2 = 6 \quad \Leftrightarrow \quad 3y^2 = 6 \quad \Leftrightarrow \quad y = \pm\sqrt{2},$$

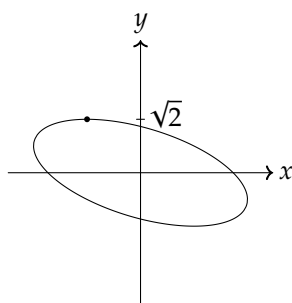
vilket ger oss punkterna $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ och $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

2. Sätter vi $\nabla g = (2x + 2y, 2x + 8y) = (0, 0)$ fås det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ 2x + 8y = 0 \end{cases}$$

som har lösningen $x = y = 0$, men punkten $(0, 0)$ ligger inte på kurvan.

De enda punkter där kurvan kan ha störst y -koordinat är $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ och $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, och då ser vi direkt att $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ är det sökta svaret.



10. Flytta över x_4 -termerna i högerledet

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 - a_{14}x_4 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 - a_{24}x_4 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 - a_{34}x_4 \end{cases}$$

Detta ekvationssystem för x_1 , x_2 och x_3 har för varje värde på x_4 exakt en lösning om

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (*)$$

Det betyder att det ursprungliga ekvationssystemet har en parameterlösning där x_4 kan användas som enda parameter om $(*)$ är uppfylld.

På samma sätt fås motsvarande determinantvillkor för när systemet har en parameterlösning där x_1 , x_2 resp. x_3 kan användas som enda parameter. Om ekvationssystemet har en parameterlösning med precis en parameter kan lösningarna skrivas upp genom att använda någon av variablerna x_1 , x_2 , x_3 eller x_4 som parameter. Därför blir svaret att ekvationssystemet har en parameterlösning med precis en parameter om och endast om åtminstone en av determinanterna

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} \quad \text{eller} \quad \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$$

är skild från noll.