1. För att beräkna uttrycket i vänsterledet bestämmer vi först derivatorna $f'_x$, $f''_{xx}$ och $f''_{xy}$,

$$
\begin{aligned}
f'_x &= \frac{\partial}{\partial x}\Big(xy\arctan\frac{x}{y}\Big) = 1\cdot y\arctan\frac{x}{y} + xy\cdot\frac{\partial}{\partial x}\arctan\frac{x}{y}\\
&= y\arctan\frac{x}{y} + xy\cdot\frac{1}{1+(x/y)^2}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{x}{y}\Big) = y\arctan\frac{x}{y} + xy\,\frac{1}{1+(x/y)^2}\,\frac{1}{y}\\
&= y\arctan\frac{x}{y} + \frac{x}{1+(x/y)^2} = y\arctan\frac{x}{y} + \frac{xy^2}{x^2+y^2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f''_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x}f'_x = \frac{\partial}{\partial x}\Big(y\arctan\frac{x}{y} + \frac{xy^2}{x^2+y^2}\Big)\\
&= y\,\frac{1}{1+(x/y)^2}\,\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{x}{y}\Big) + \frac{y^2\cdot(x^2+y^2) - xy^2\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = y\,\frac{1}{1+(x/y)^2}\,\frac{1}{y} + \frac{-x^2y^2+y^4}{(x^2+y^2)^2}\\
&= \frac{y^2}{x^2+y^2} + \frac{-x^2y^2+y^4}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2(x^2+y^2) - x^2y^2 + y^4}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2y^4}{(x^2+y^2)^2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f''_{xy} &= \frac{\partial}{\partial y}f'_x = \frac{\partial}{\partial y}\Big(y\arctan\frac{x}{y} + \frac{xy^2}{x^2+y^2}\Big)\\
&= 1\cdot\arctan\frac{x}{y} + y\cdot\frac{1}{1+(x/y)^2}\,\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{x}{y}\Big) + \frac{2xy\cdot(x^2+y^2) - xy^2\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}\\
&= \arctan\frac{x}{y} + y\cdot\frac{1}{1+(x/y)^2}\cdot\Big(-\frac{x}{y^2}\Big) + \frac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2}\\
&= \arctan\frac{x}{y} - \frac{x/y}{1+(x/y)^2} + \frac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2} = \arctan\frac{x}{y} - \frac{xy}{x^2+y^2} + \frac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2}\\
&= \arctan\frac{x}{y} + \frac{-xy(x^2+y^2) + 2x^3y}{(x^2+y^2)^2} = \arctan\frac{x}{y} + \frac{x^3y - xy^3}{(x^2+y^2)^2}.
\end{aligned}
$$

Detta ger att

$$
\begin{aligned}
yf''_{xy} + xf''_{xx} - f'_x &= y\cdot\Big(\arctan\frac{x}{y} + \frac{x^3y-xy^3}{(x^2+y^2)^2}\Big) + x\cdot\frac{2y^4}{(x^2+y^2)^2} - \Big(y\arctan\frac{x}{y} + \frac{xy^2}{x^2+y^2}\Big)\\
&= \frac{x^3y^2 - xy^4}{(x^2+y^2)^2} + \frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2} - \frac{xy^2}{x^2+y^2} = \frac{x^3y^2 - xy^4 + 2xy^4 - xy^2(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} = 0.
\end{aligned}
$$

2. Skärningspunkten mellan planen är den punkt som tillhör alla tre planen. Det betyder att skärningspunkten uppfyller alla plans ekvationer,

$$
\begin{cases}
x + 2y - z = 1\\
2x - y + 2z = 0\\
x + 3y - 2z = 2
\end{cases}
$$

Detta linjära ekvationssystem löser vi med gausselimininering,

$$
\left(\begin{array}{rrr|r}
1 & 2 & -1 & 1\\
2 & -1 & 2 & 0\\
1 & 3 & -2 & 2
\end{array}\right)
\sim
\left(\begin{array}{rrr|r}
1 & 2 & -1 & 1\\
0 & -5 & 4 & -2\\
0 & 1 & -1 & 1
\end{array}\right)
\sim
$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 4 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ 5 \quad -2 \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ - \; + \; - \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right).$$

Skärningspunkten är alltså $(2, -2, -3)$.

3. En samling av fyra vektorer bildar en bas för $\mathrm{R}^4$ om de är linjärt oberoende. Det betyder att ingen av vektorerna ska kunna skrivas som en linjärkombination av de övriga vektorerna. Ett annat sätt att formulera detta villkor är att om

$$k_1(1,0,-1,1) + k_2(2,0,2,1) + k_3(0,1,-1,1) + k_4(0,-2,0,-1) = (0,0,0,0),$$

så måste $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$. I komponentform blir ekvationen

$$\left\{\begin{aligned} k_1 + 2k_2 \phantom{{}-k_3 - 2k_4} &= 0 \\ k_3 - 2k_4 &= 0 \\ -k_1 + 2k_2 - k_3 \phantom{{}-2k_4} &= 0 \\ k_1 + k_2 + k_3 - k_4 &= 0 \end{aligned}\right.$$

Detta linjära ekvationssystem har endast den triviala lösningen $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$ om determinanten av koefficientmatrisen är skild från noll,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{array}{c} + \; - \\ \\ \\ \\ \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} \begin{array}{c} \\ 4 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ -\tfrac{1}{3} \\ \\ \end{array} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -\tfrac{2}{3} \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1) \cdot 3 \cdot (-\tfrac{2}{3}) = -2 \neq 0.$$

Vektorerna bildar en bas för $\mathrm{R}^4$.

4. Med matrisräknereglerna kan uttrycket skrivas om till

$$(A + B^{-1})A^{-1} = AA^{-1} + B^{-1}A^{-1} = E + (AB)^{-1}.$$

Inversmatrisen $(AB)^{-1}$ räknar vi ut med ett räkneschema,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} - \; + \; - \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -5 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Detta betyder att

$$(A+B^{-1})A^{-1} = E + (AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Om humlan flyger i riktningen $\boldsymbol{u}$ kommer den uppleva en temperaturökningstakt som ges av riktningsderivatan $\partial T/\partial\hat{\boldsymbol{u}}$, och ökningstakten $\partial T/\partial\hat{\boldsymbol{v}}$ om den flyger i riktningen $\boldsymbol{v}$.

Temperaturfunktionen $T$ är differentierbar så riktningsderivatorna kan vi räkna ut med formlerna
$$\frac{\partial T}{\partial\hat{\boldsymbol{u}}} = \nabla T\cdot\hat{\boldsymbol{u}} \quad \text{respektive} \quad \frac{\partial T}{\partial\hat{\boldsymbol{v}}} = \nabla T\cdot\hat{\boldsymbol{v}}.$$

Gradienten $\nabla T$ ges av $\nabla T = (T'_x, T'_y, T'_z) = (3y, 3x+2y, 4z)$ och i punkten $(x,y,z) = (1,2,-1)$ har den värdet $\nabla T(1,2,-1) = (3\cdot 2, 3\cdot 1 + 2\cdot 2, 4\cdot(-1)) = (6,7,-4)$. Enhetsvektorerna $\hat{\boldsymbol{u}}$ och $\hat{\boldsymbol{v}}$ får vi genom att normera $\boldsymbol{u}$ respektive $\boldsymbol{v}$,

$$\hat{\boldsymbol{u}} = \frac{\boldsymbol{u}}{|\boldsymbol{u}|} = \frac{(2,-2,-1)}{\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}} = \frac{(2,-2,-1)}{\sqrt{9}} = (\tfrac{2}{3}, -\tfrac{2}{3}, -\tfrac{1}{3}),$$
$$\hat{\boldsymbol{v}} = \frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|} = \frac{(3,0,4)}{\sqrt{3^2+0^2+4^2}} = \frac{(3,0,4)}{\sqrt{25}} = (\tfrac{3}{5}, 0, \tfrac{4}{5}).$$

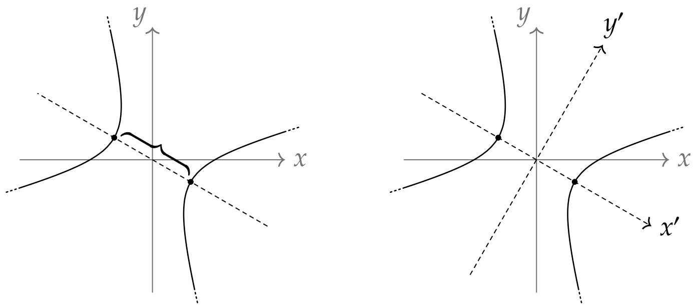
Riktningsderivatornas värden är

$$\frac{\partial T}{\partial\hat{\boldsymbol{u}}} = \nabla T\cdot\hat{\boldsymbol{u}} = (6,7,-4)\cdot(\tfrac{2}{3}, -\tfrac{2}{3}, -\tfrac{1}{3}) = 6\cdot\tfrac{2}{3} - 7\cdot\tfrac{2}{3} + 4\cdot\tfrac{1}{3} = \frac{12-14+4}{3} = \tfrac{2}{3},$$
$$\frac{\partial T}{\partial\hat{\boldsymbol{v}}} = \nabla T\cdot\hat{\boldsymbol{v}} = (6,7,-4)\cdot(\tfrac{3}{5}, 0, \tfrac{4}{5}) = 6\cdot\tfrac{3}{5} + 0 - 4\cdot\tfrac{4}{5} = \frac{18+0-16}{5} = \tfrac{2}{5},$$

och eftersom $\partial T/\partial\hat{\boldsymbol{u}} > \partial T/\partial\hat{\boldsymbol{v}}$ ska humlan flyga i riktningen $\boldsymbol{u}$ för att uppleva störst, omedelbar temperaturökning.

6. Om vi skisserar en hyperbel så ser vi att det kortaste avståndet mellan de två grenarna är avståndet mellan punkterna där hyperbeln skär en av huvudaxlarna. Genom att skriva hyperbeln i huvudaxelform så gör vi ett byte av koordinatsystem till ett system där huvudaxlarna

blir de nya koordinataxelriktningarna. I detta nya koordinatsystem kan vi relativt enkelt bestämma de två punkterna som ger minsta avståndet eftersom vi vet att de ligger på en av koordinataxlarna.




Hyperbelns ekvation skriver vi först i matrisform

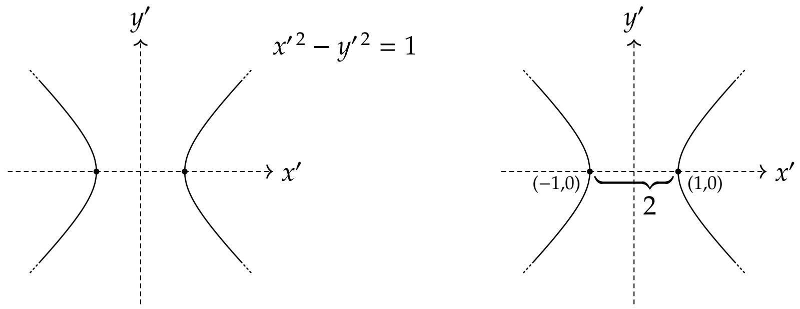
$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1.$$

Huvudaxlarna till hyperbeln är egenvektorerna till matrisen i vänsterledet och huvudaxelformen är $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 = 1$, där $\lambda_1, \lambda_2$ är matrisens egenvärden och $x', y'$ betecknar koordinater i det nya systemet.

Egenvärdena ges av den karakteristiska ekvationen

$$\begin{vmatrix} \lambda - \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \lambda + \frac{1}{2} \end{vmatrix} = (\lambda - \tfrac{1}{2})(\lambda + \tfrac{1}{2}) - \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3} = \lambda^2 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \pm 1.$$

Det betyder att hyperbelns huvudaxelform är $x'^2 - y'^2 = 1$. De två sökta punkterna får vi genom att sätta $y' = 0$ i hyperbelns ekvation $x'^2 - 0^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x' = \pm 1$ och avståndet mellan dessa punkterna är 2.




7. a) Funktionen $(x, y) = (x(u, v), y(u, v))$ har en lokal invers kring punkten $(u, v) = (u_0, v_0)$ om

$$\det\left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right) \neq 0$$

uträknad i punkten $(u, v) = (u_0, v_0)$. Jacobimatrisen är lika med

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2u}{v} & -\dfrac{u^2}{v^2} \\ -\dfrac{v^2}{u^2} & \dfrac{2v}{u} \end{pmatrix}$$

vilket ger att

$$\det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right) = \begin{vmatrix} \dfrac{2u_0}{v_0} & -\dfrac{u_0^2}{v_0^2} \\ -\dfrac{v_0^2}{u_0^2} & \dfrac{2v_0}{u_0} \end{vmatrix} = \frac{2u_0}{v_0}\cdot\frac{2v_0}{u_0} - \frac{u_0^2}{v_0^2}\cdot\frac{v_0^2}{u_0^2} = 4-1 = 3 \neq 0.$$

b) Den lokala inversen $(u,v) = (u(x,y), v(x,y))$ har en Jacobimatris som uppfyller

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^{-1}.$$

Från detta samband har vi att

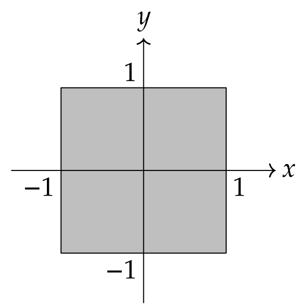
$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{2u}{v} & -\dfrac{u^2}{v^2} \\ -\dfrac{v^2}{u^2} & \dfrac{2v}{u} \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{1}{\dfrac{2u}{v}\cdot\dfrac{2v}{u} - \dfrac{u^2}{v^2}\cdot\dfrac{v^2}{u^2}} \begin{pmatrix} \dfrac{2v}{u} & \dfrac{u^2}{v^2} \\ \dfrac{v^2}{u^2} & \dfrac{2u}{v} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \dfrac{2v}{u} & \dfrac{u^2}{v^2} \\ \dfrac{v^2}{u^2} & \dfrac{2u}{v} \end{pmatrix}$$

och vi kan direkt avläsa att

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2v}{3u} \quad \text{och} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u^2}{3v^2}.$$

8. Kvadraten $-1 \le x \le 1$ , $-1 \le y \le 1$ är kompakt (sluten och begränsad) och eftersom funktionen $f$ är kontinuerlig kan vi på förhand säga att funktionen verkligen antar ett största och minsta värde i området.
Dessa extremvärden kan funktionen bara anta i någon av följande typer av punkter



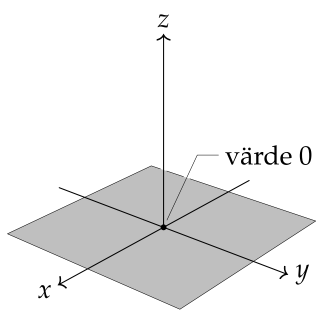

1. inre kritiska punkter
2. punkter på randlinjerna
3. hörnpunkter

Vi undersöker dessa tre fall.

1. I en inre kritisk punkt är $f'_x = f'_y = 0$ vilket ger ekvationerna

$$\begin{cases} f'_x = 4x + \phantom{6}y = 0, \\ f'_y = \phantom{4}x + 6y = 0. \end{cases}$$

Detta linjära ekvationssystem har lösningen $x = y = 0$ . Origo $(0,0)$ är alltså en inre kritisk punkt, och i denna punkt antar $f$ värdet $f(0,0) = 2\cdot 0^2 + 0\cdot 0 + 3\cdot 0^2 = 0$ .

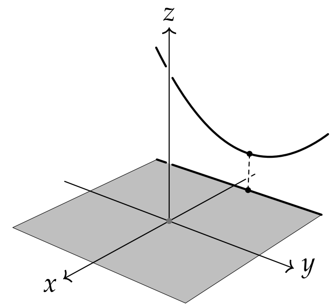


2. Det finns fyra randlinjer att undersöka.

- På linjen $x = -1$ är funktionen lika med $f(-1, y) = 3y^2 - y + 2$. Vi får fram de möjliga extrempunkterna på linjen genom att sätta derivatan lika med noll,

$$\frac{d}{dy} f(-1, y) = 6y - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = \tfrac{1}{6}$$

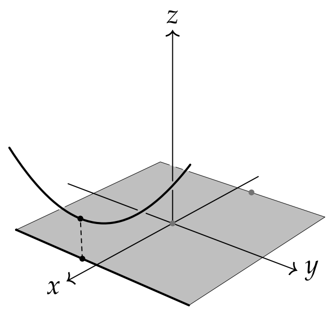
  vilket svarar mot punkten $(-1, \frac{1}{6})$. I denna punkt har funktionen värdet $f(-1, \frac{1}{6}) = \frac{23}{12}$. Det är också enkelt att se att andraderivatan har värdet 6 så punkten måste vara en lokal minimipunkt på linjen.




- När vi inskränker oss till linjen $x = 1$ antar funktionen värdena $f(1, y) = 3y^2 + y + 2$. Sätter vi derivatan lika med noll fås

$$\frac{d}{dy} f(1, y) = 6y + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = -\tfrac{1}{6}$$

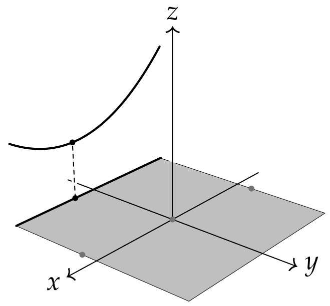
  och i punkten $(1, -\frac{1}{6})$ har funktionen värdet $f(1, -\frac{1}{6}) = \frac{23}{12}$. Andraderivatan är lika med 6 vilket betyder att punkten är en lokal minimipunkt på linjen.




- På linjen $y = -1$ är $f(x, -1) = 2x^2 - x + 3$ och när vi sätter derivatan lika med noll fås

$$\frac{d}{dx} f(x, -1) = 4x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \tfrac{1}{4}.$$

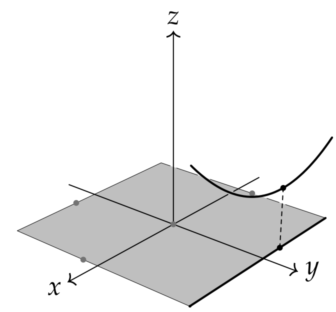
  Detta ger oss punkten $(\frac{1}{4}, -1)$ där funktionen har värdet $f(\frac{1}{4}, -1) = \frac{23}{8}$. Eftersom andraderivatan är lika med 4 är punkten en lokal minimipunkt på linjen.




- Funktionen $f$ är lika med $f(x, 1) = 2x^2 + x + 3$ på den sista randlinjen $y = 1$. För att få fram lokala extrempunkter på linjen sätter vi derivatan lika med noll,

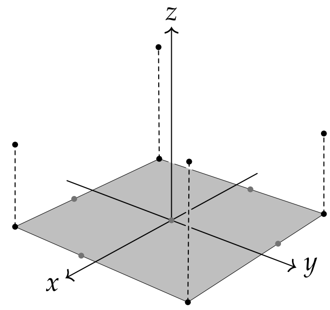
$$\frac{d}{dx} f(x, 1) = 4x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\tfrac{1}{4},$$

  vilket ger oss punkten $(-\frac{1}{4}, 1)$. Funktionen har värdet $f(-\frac{1}{4}, 1) = \frac{23}{8}$ i den punkten, som dessutom är en lokal minimipunkt på linjen eftersom andraderivatan är lika med 4.



3. I hörnpunkterna $(-1,-1)$, $(-1,1)$, $(1,-1)$ och $(1,1)$ antar funktionen värdena

$$\begin{aligned} f(-1,-1) &= 6, \\ f(-1,1) &= 4, \\ f(1,-1) &= 4, \\ f(1,1) &= 6. \end{aligned}$$



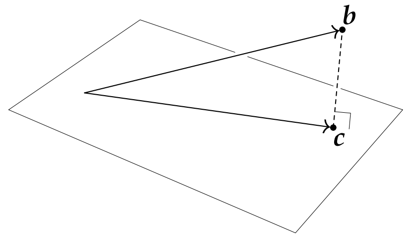

Jämför vi funktionsvärdena ser vi att funktionen antar minsta värdet 0 och största värdet 6.

9. a) Om $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$ så är

$$A\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 \\ a_{31}u_1 + a_{32}u_2 \end{pmatrix} = u_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}$$

vilket visar att vektorn $A\boldsymbol{u}$ är en linjärkombination av kolonnvektorerna $(a_{11}, a_{21}, a_{31})$ och $(a_{12}, a_{22}, a_{32})$ till matrisen $A$, d.v.s. $A\boldsymbol{u}$ ligger i planet $P$ som spänns upp av dessa kolonnvektorer.

b) Att $\boldsymbol{c}$ är den vinkelräta projektionen av $\boldsymbol{b}$ på $P$ betyder att sträckan mellan $\boldsymbol{c}$ och $\boldsymbol{b}$ är vinkelrät mot planet $P$, d.v.s. vektorn $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}$ är vinkelrät mot planet $P$.




Vektorn $\boldsymbol{d} = (d_1, d_2, d_3)$ är alltså vinkelrät mot alla vektorer som är parallella med planet och speciellt vinkelrät mot kolonnvektorerna $(a_{11}, a_{21}, a_{31})$ och $(a_{12}, a_{22}, a_{32})$ som spänner upp planet $P$.

Därför är

$$A^T(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}) = A^T\boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}d_1 + a_{21}d_2 + a_{31}d_3 \\ a_{12}d_1 + a_{22}d_2 + a_{32}d_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (a_{11}, a_{21}, a_{31}) \cdot (d_1, d_2, d_3) \\ (a_{12}, a_{22}, a_{32}) \cdot (d_1, d_2, d_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}.$$

c) Vänstermultiplicera båda led i $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ med $A^T$, $A^TA\boldsymbol{x} = A^T\boldsymbol{c}$. Enligt deluppgift b är $A^T(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{0}$, d.v.s. $A^T\boldsymbol{b} = A^T\boldsymbol{c}$. Detta ger att $A^TA\boldsymbol{x} = A^T\boldsymbol{c} = A^T\boldsymbol{b}$.

10. a) Ett exempel är funktionen $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ eftersom den uppfyller

$$f(tx_1, tx_2, tx_3) = (tx_1)^2 + (tx_2)^2 + (tx_3)^2 = t^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = t^2 f(x_1, x_2, x_3).$$

b) Derivera sambandet

$$f(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = t^a f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

med avseende på $t$. I vänsterledet ger kedjeregeln

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} f(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(tx_1, \dots, tx_n) \cdot \frac{d(tx_1)}{dt} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(tx_1, \dots, tx_n) \cdot \frac{d(tx_n)}{dt} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(tx_1, \dots, tx_n) \cdot x_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(tx_1, \dots, tx_n) \cdot x_n \\ &= (x_1, \dots, x_n) \cdot \operatorname{grad} f(tx_1, \dots, tx_n)\end{aligned}$$

och högerledet blir $\dfrac{d}{dt} t^a f(x_1, \dots, x_n) = at^{a-1} f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Sätter vi $t = 1$ och båda led lika fås att

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot \operatorname{grad} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a\, f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$