

1. Ytan ges på formen $f(x,y,z) = 8$ där $f(x,y,z) = xy^2 + 2yz^2 + 3zx^2$. I punkten $(0,1,2)$ fås $f'_x = y^2 + 6xz = 1$, $f'_y = 2xy + 2z^2 = 8$, $f'_z = 4yz + 3x^2 = 8$, alltså $\text{grad } f(0,1,2) = (1,8,8)$ och den sökta ekvationen är $(x-0, y-1, z-2) \cdot (1,8,8) = 0$, dvs

Svar: $x + 8y + 8z = 24$.

2. Man har: $(A^{-1}A^T)^{-1} = (A^T)^{-1}(A^{-1})^{-1} = (A^{-1})^T A$

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad (A^{-1})^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(A^{-1})^T A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Svar: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

- 3a. Skärningspunkten fås ur ekvationen $\mathbf{r}(t) = \mathbf{p}(s) \Leftrightarrow (2-t, 3-2t, 3-t) = (3+2s, 3+2s, 2) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 2-t = 3+2s \\ 3-2t = 3+2s \\ 3-t = 2 \end{cases} \text{ . Man får } t = 1, s = -1, \text{ dvs punkten } (1,1,2).$$

Svar: $(1,1,2)$.

- 3b. Linjernas riktningsvektorer är $\mathbf{n}_1 = (1,2,1)$ resp. $\mathbf{n}_2 = (1,1,0)$. Planets normalvektor är

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y - \mathbf{e}_z = (-1,1,-1). \text{ Planets ekvation kan skrivas på formen}$$

$-x + y - z = d$. Eftersom punkten $(1,1,2)$ uppfyller denna ekvation så måste $d = -2$, alltså planets ekvation är $-x + y - z = -2 \Leftrightarrow x - y + z = 2$.

Svar: $x - y + z = 2$.

- 4a. Det sökta Taylorpolynomet p ges av

$$f(1,2) + f'_x(1,2)h + f'_y(1,2)k + \frac{1}{2}f''_{xx}(1,2)h^2 + f''_{xy}(1,2)hk + \frac{1}{2}f''_{yy}(1,2)k^2 \text{ där } h = x-1, k = y-2.$$

Vi har $f(x,y) = x^2 + 2 \cos(2x-y)$ och i punkten $(1,2)$ fås

$$f(1,2) = 3, \quad f'_x = 2x - 4 \sin(2x-y) = 2, \quad f'_y = 2 \sin(2x-y) = 0,$$

$$f''_{xx} = 2 - 8 \cos(2x-y) = -6, \quad f''_{xy} = 4 \cos(2x-y) = 4, \quad f''_{yy} = -2 \cos(2x-y) = -2.$$

$$\text{Alltså } p(x,y) = 3 + 2(x-1) - 3(x-1)^2 + 4(x-1)(y-2) - (y-2)^2.$$

Svar: $p(x,y) = 3 + 2(x-1) - 3(x-1)^2 + 4(x-1)(y-2) - (y-2)^2$.

- 4b. $f(1.1, 1.2) \approx p(1.1, 1.2) = 3.2$.

Svar: $f(1.1, 1.2) \approx 3.2$.

5. Sätt $t = 3x + ay$. Vi har $z = (2x-3y)f(t)$,

$$z'_x = 2f(t) + (2x-3y)f'(t)t'_x = 2f(t) + 3(2x-3y)f'(t) \text{ och}$$

$$z'_y = -3f(t) + (2x-3y)f'(t)t'_y = -3f(t) + a(2x-3y)f'(t) \text{ vilket ger}$$

$$3z'_x + 2z'_y = (9+2a)(2x-3y)f'(t) = 0 \Leftrightarrow a = -9/2.$$

Svar: $a = -9/2$.

- 6a. Vi har $f(x,y) = \frac{x+y}{2x-y}$. I punkten $(1,1)$ får man $f'_x = \frac{-3y}{(2x-y)^2} = -3$ och $f'_y = \frac{3x}{(2x-y)^2} = 3$,

$$\Rightarrow \text{grad } f(1,1) = (-3,3) \text{ och } f'_v(1,1) = \text{grad } f(1,1) \cdot \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = (-3,3) \cdot \frac{(1,2)}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}}.$$

Svar: $f'_v(1,1) = \frac{3}{\sqrt{5}}$.

- 6b. Största värdet av $f'_u(1,1)$ fås då $\mathbf{u}$ har riktning av $\text{grad } f(1,1)$ dvs $\mathbf{u} = (-3,3)$. Detta värde är $|\text{grad } f(1,1)| = 3\sqrt{2}$.

Svar: $\mathbf{u} = (-3,3)$. Maximala värdet är $3\sqrt{2}$.

7. Funktionen $f(x,y) = x + 2y$ är kontinuerlig och den tillåtna mängden $x^2 + y^2 = 5, x \geq 0, y \geq 0$ är kompakt. Detta medför att f antar ett största och ett minsta värde i mängden. Punkter där dessa värden antas är antingen ändpunkterna på kvartscirkeln eller kritiska punkter till Lagranges funktion $g(x,y,t) = x + 2y + t(x^2 + y^2 - 5)$.

Ändpunkterna: $(0, \sqrt{5})$ och $(\sqrt{5}, 0)$.

Kritiska punkter:

$$\begin{cases} g'_x = 1 + 2tx = 0 \\ g'_y = 2 + 2ty = 0 \\ g'_t = x^2 + y^2 - 5 = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Vi har } yg'_x - xg'_y = 0 \Leftrightarrow y = 2x, \text{ vilket insatt i } g'_t = 0 \text{ ger } 5x^2 - 5 = 0, \\ \text{dvs } x = 1 \text{ (eftersom } x \geq 0) \text{ och } y = 2, \text{ dvs punkten } (1,2) \end{array}$$

Aktuella punkter: $(0, \sqrt{5})$, $(\sqrt{5}, 0)$ och $(1, 2)$.

I dessa punkter antar f värdena $f(0, \sqrt{5}) = 2\sqrt{5}$, $f(\sqrt{5}, 0) = \sqrt{5}$ och $f(1, 2) = 5$, alltså största värdet $= 5$ och minsta värdet $= \sqrt{5}$.

Svar: Största värdet $= 5$ och minsta värdet $= \sqrt{5}$.

8. Ekvationssystemet (i obekanta x, y och z)
$$\begin{cases} ax + 3y + 2z = 4a + 3b \\ bx + 2y + 2z = 2a + 4b \\ ax + y + 2z = a + 4b \end{cases}$$
 har precis en lösning

$\Leftrightarrow$ determinanten $\begin{vmatrix} a & 3 & 2 \\ b & 2 & 2 \\ a & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4a - 4b \neq 0$. Om $(x, y, z) = (3, 2, 1)$ skulle vara en lösning (sätt

in dessa värden i ekvationssystemet) så skulle
$$\begin{cases} a + 3b = 8 \\ 2a + b = 6 \\ 2a - 4b = -4 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 2, \text{ vilket strider mot}$$

att $4a - 4b \neq 0$.

Svar: Det finns inte några sådana konstanter.

9. Den kvadratiske delen $x^2 + 4xy + ay^2$ beskrivs av matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & a \end{bmatrix}$. Om den givna ek-

vationen skall vara en ekvation för en parabel så måste ett av egenvärdena till matrisen A vara lika med noll. Egenvärdena fås ur ekvationen $\det(A - \lambda E) = 0$:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & a-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)(a-\lambda) - 4 = 0. \text{ För } \lambda = 0 \text{ får vi } a = 4, \text{ vilket alltså är den enda}$$

tänkbara värdet för vilket den givna ekvationen beskriver en parabel. Den karakteristiska ekvationen är då $(1-\lambda)(4-\lambda) - 4 = 0$ och man får rötterna 0 och 5.

Egenvektorerna bestäms ur ekvationen $(A - \lambda E)\mathbf{v} = \mathbf{0}$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$:

För $\lambda = 5$ får vi $\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow 2b - c = 0$. En motsvarande egenvektor är $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Egenvektorerna till det andra egenvärdet $\lambda = 0$ är vinkelräta mot $\mathbf{v}_1$ och en egenvektor är därför $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

De båda valda egenvektorerna har längden $\sqrt{5}$. Koordinatbytet med transformationen

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}u - \frac{2}{\sqrt{5}}v \\ y = \frac{2}{\sqrt{5}}u + \frac{1}{\sqrt{5}}v \end{cases} \text{ ger ekvationen } 5u^2 - \sqrt{5}v = 0 \Leftrightarrow v = \sqrt{5}u^2, \text{ alltså en parabel.}$$

Svar: Parabeln $\Leftrightarrow a = 4$.

10. Antag att $a\mathbf{v}_1 + b(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + c(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3) + d(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_4) = \mathbf{0}$. Då gäller efter omskrivning att $(a + b + c + d)\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 + c\mathbf{v}_3 + d\mathbf{v}_4 = \mathbf{0}$. Om $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ är linjärt oberoende så måste det gälla att $a + b + c + d = b = c = d = 0$ dvs $a = b = c = d = 0$. Detta innebär att vektorerna $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_4$ är linjärt oberoende.

Antag att $a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 + c\mathbf{v}_3 + d\mathbf{v}_4 = \mathbf{0}$. Då gäller efter omskrivning att

$(a - b - c - d)\mathbf{v}_1 + b(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + c(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3) + d(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_4) = \mathbf{0}$. Om $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_4$ är linjärt oberoende så måste $a - b - c - d = b = c = d = 0$ dvs $a = b = c = d = 0$. Detta innebär att vektorerna $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ är linjärt oberoende.