Institutionen för matematik
KTH
Bengt Ek

Svar till KS2 i Matematik 2 för K1 och Bio1, 26 februari 2004

[Tryckfel kan förekomma]

A1) Om det givna gränsvärdet

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4x^3+3xy-2y^3}{x^2+y^2}$$

existerar, måste gränsvärdena längs alla ”strålar” in mot origo existera och vara lika. Men

$$\lim_{t\to 0+} f(t,0) = \lim_{t\to 0+} \frac{4t^3+0+0}{t^2+0} = \lim_{t\to 0+} 4t = 0 \text{ och}$$

$$\lim_{t\to 0+} f(t,t) = \lim_{t\to 0+} \frac{4t^3+3t^2-2t^3}{t^2+t^2} = \lim_{t\to 0+} \frac{3+2t}{2} = \tfrac{3}{2}, \text{ så}$$

Svar: Gränsvärdet existerar inte.

B1) Om det givna gränsvärdet

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^3+2xy-4y^3}{x^2+y^2}$$

existerar, måste gränsvärdena längs alla ”strålar” in mot origo existera och vara lika. Men

$$\lim_{t\to 0+} f(t,0) = \lim_{t\to 0+} \frac{3t^3+0+0}{t^2+0} = \lim_{t\to 0+} 3t = 0 \text{ och}$$

$$\lim_{t\to 0+} f(t,t) = \lim_{t\to 0+} \frac{3t^3+2t^2-4t^3}{t^2+t^2} = \lim_{t\to 0+} \frac{2-t}{2} = 1, \text{ så}$$

Svar: Gränsvärdet existerar inte.

A2) Vänsterledet i den givna differentialekvationen $x\dfrac{\partial z}{\partial x} - y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ kan skrivas $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}(x,y)}\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$, vilket med kedjeregeln blir $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}(u,v)}\dfrac{\mathrm{d}(u,v)}{\mathrm{d}(x,y)}\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$. Med $u = xy, v = x^2+2xy-y^2$ blir $\dfrac{\mathrm{d}(u,v)}{\mathrm{d}(x,y)} = \begin{pmatrix} y & x \\ 2x+2y & 2x-2y \end{pmatrix}$, så $\dfrac{\mathrm{d}(u,v)}{\mathrm{d}(x,y)}\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2(x^2+y^2) \end{pmatrix}$ och ekvationen blir $2(x^2+y^2)\dfrac{\partial z}{\partial v} = 0$, dvs

Svar: Ekvationen blir $\dfrac{\partial z}{\partial v} = 0$.

Om man ogillar räkningen med matriser, kan man förstås använda kedjeregeln i ”skalär” form: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$ etc.

B2) Vänsterledet i den givna differentialekvationen $x\dfrac{\partial z}{\partial x} - y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ kan skrivas $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}(x,y)}\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$, vilket med kedjeregeln blir $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}(u,v)}\dfrac{\mathrm{d}(u,v)}{\mathrm{d}(x,y)}\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$. Med $u = -x^2+3xy+y^2, v = xy$ blir $\dfrac{\mathrm{d}(u,v)}{\mathrm{d}(x,y)} = \begin{pmatrix} -2x+3y & 3x+2y \\ y & x \end{pmatrix}$, så $\dfrac{\mathrm{d}(u,v)}{\mathrm{d}(x,y)}\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2(x^2+y^2) \\ 0 \end{pmatrix}$ och ekvationen blir $-2(x^2+y^2)\dfrac{\partial z}{\partial u} = 0$, dvs

Svar: Ekvationen blir $\dfrac{\partial z}{\partial u} = 0$.

Om man ogillar räkningen med matriser, kan man förstås använda kedjeregeln i "skalär" form: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$ etc.

A3) En normalvektor till nivåytan $f(x,y,z) = e^{xy} + \cos z - y^3(2+z) = 0$ ges av f:s gradient i punkten (om den inte är noll). I vårt fall är $\bigtriangledown f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}) = (ye^{xy}, xe^{xy} - 3y^2(2+z), -\sin z - y^3)$, så $\bigtriangledown f(0,1,0) = (1,-6,-1)$ och

Svar: En normalvektor i punkten är $\mathbf{n} = (1,-6,-1)$.

B3) En normalvektor till nivåytan $f(x,y,z) = e^{yz} + \cos x - z^3(2+x) = 0$ ges av f:s gradient i punkten (om den inte är noll). I vårt fall är $\bigtriangledown f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}) = (-\sin x - z^3, ze^{yz}, ye^{yz} - 3z^2(2+x))$, så $\bigtriangledown f(0,0,1) = (-1,1,-6)$ och

Svar: En normalvektor i punkten är $\mathbf{n} = (-1,1,-6)$.