Institutionen för matematik
KTH
Bengt Ek

Svar till KS1 i Matematik 2 för K1 och Bio1, 10 februari 2004
[Tryckfel kan förekomma]

A1)

Systemets totalmatris är $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & | & b \\ 1 & 4 & a & | & 2 \\ 1 & 3 & 5 & | & 0 \end{pmatrix}$.

Elementära radoperationer ger ekvivalenta system(-matriser):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & | & b \\ 1 & 4 & a & | & 2 \\ 1 & 3 & 5 & | & 0 \end{pmatrix} \overset{-1\cdot\text{rad1 till rad2 och rad3}}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & | & b \\ 0 & 2 & a-4 & | & 2-b \\ 0 & 1 & 1 & | & -b \end{pmatrix} \overset{-2\cdot\text{rad3 till rad2}}{\Leftrightarrow}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & | & b \\ 0 & 0 & a-6 & | & b+2 \\ 0 & 1 & 1 & | & -b \end{pmatrix} \overset{\text{byt rad2 och rad3}}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & | & b \\ 0 & 1 & 1 & | & -b \\ 0 & 0 & a-6 & | & b+2 \end{pmatrix}.$$

Om $a \neq 6$ ger sista raden z entydigt. Andra raden ger då y entydigt och den första ger x, så systemet har en entydig lösning. Om $a = 6$ och $b \neq -2$ kan rad tre inte uppfyllas, 0 lösningar. Om slutligen $a = 6$ och $b = -2$ kan z väljas godtyckligt och y och x fås ur raderna två och ett, så ett oändligt antal lösningar.
Svar: Om $\mathbf{a \neq 6}$: en lösning,
om $\mathbf{a = 6, b \neq -2}$: ingen lösning,
om $\mathbf{a = 6, b = -2}$: ett oändligt antal lösingar.

B1)

Systemets totalmatris är $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & | & b \\ 1 & 5 & a & | & 3 \\ 1 & 4 & 3 & | & 0 \end{pmatrix}$.

Elementära radoperationer ger ekvivalenta system(-matriser):

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & | & b \\ 1 & 5 & a & | & 3 \\ 1 & 4 & 3 & | & 0 \end{pmatrix} \overset{-1\cdot\text{rad1 till rad2 och rad3}}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & | & b \\ 0 & 2 & a-2 & | & 3-b \\ 0 & 1 & 1 & | & -b \end{pmatrix} \overset{-2\cdot\text{rad3 till rad2}}{\Leftrightarrow}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & | & b \\ 0 & 0 & a-4 & | & b+3 \\ 0 & 1 & 1 & | & -b \end{pmatrix} \overset{\text{byt rad2 och rad3}}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & | & b \\ 0 & 1 & 1 & | & -b \\ 0 & 0 & a-4 & | & b+3 \end{pmatrix}.$$

Om $a \neq 4$ ger sista raden z entydigt. Andra raden ger då y entydigt och den första ger x, så systemet har en entydig lösning. Om $a = 4$ och $b \neq -3$ kan rad tre inte uppfyllas, 0 lösningar. Om slutligen $a = 4$ och $b = -3$ kan z väljas godtyckligt och y och x fås ur raderna två och ett, så ett oändligt antal lösningar.
Svar: Om $\mathbf{a \neq 4}$: en lösning,
om $\mathbf{a = 4, b \neq -3}$: ingen lösning,
om $\mathbf{a = 4, b = -3}$: ett oändligt antal lösingar.

A2) Avståndet från punkten (x_1, y_1, z_1) till planet $Ax + By + Cz + D = 0$ är

$$\frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

så avståndet från $(2, -1, 4)$ till $6x - 2y + 3z = 5$ är

$$d = \frac{|6 \cdot 2 - 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 - 5|}{\sqrt{6^2 + (-2)^2 + 3^2}} = \frac{21}{7} = 3.$$

Svar: Avståndet är 3 (l.e.).

B2) Avståndet från punkten (x_1, y_1, z_1) till planet $Ax + By + Cz + D = 0$ är

$$\frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

så avståndet från $(2, 4, -1)$ till $3x + 2y - 6z = 6$ är

$$d = \frac{|3 \cdot 2 + 2 \cdot 4 - 6 \cdot (-1) - 6|}{\sqrt{3^2 + 2^2 + (-6)^2}} = \frac{14}{7} = 2.$$

Svar: Avståndet är 2 (l.e.).

A3) Vektorerna är linjärt oberoende om och endast om determinanten av matrisen med dem som kolonner är $\neq 0$.
Räkneregler för determinanter ger

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \overset{-3\cdot\text{kol2 till kol3}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 1 & 3 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} \overset{\text{utv. efter rad3}}{=} 1(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 1 & -4 & 6 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} \overset{-1\cdot\text{rad1 till rad2 och rad3}}{=}$$

$$- \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} \overset{\text{utv. efter kol1}}{=} -1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -((-1) \cdot (-2) - 1 \cdot 2) = 0,$$

så

Svar: Nej, vektorerna är linjärt beroende.

B3) Vektorerna är linjärt oberoende om och endast om determinanten av matrisen med dem som kolonner är $\neq 0$.
Räkneregler för determinanter ger

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} \overset{-1\cdot\text{kol1 till kol2}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} \overset{\text{utv. efter rad3}}{=} 1(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} \overset{-1\cdot\text{rad1 till rad2}}{=}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} \overset{\text{utv. efter kol1}}{=} 1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 4 - (-2) \cdot 2 = 0, \text{ så}$$

Svar: Nej, vektorerna är linjärt beroende.