Institutionen för matematik
KTH
Bengt Ek

Svar till KS2 i Matematik 1 för K1 och Bio1, 1 oktober 2003
[Tyrckfel kan förekomma]

A1) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$ ger $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3) = 3(x-3)(x+1)$, så $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$ eller $x = -1$
Vi får tabellen

x	-2		-1		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	5	$\nearrow$	12	$\searrow$	-15

och läser av att $f(x)$ antar alla värden > -15 och ≤ 12 (värdet -15 antas inte, eftersom vi betraktar det *öppna* intervallet $]-2, 2[$).
Så **svar: Värdemängden är** $]\mathbf{-15}, \mathbf{12}]$.

B1) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 8$ ger $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x^2 + 2x - 3) = 3(x-1)(x+3)$, så $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ eller $x = -3$
Vi får tabellen

x	-2		1		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	30	$\searrow$	3	$\nearrow$	10

och läser av att $f(x)$ antar alla värden ≥ 3 och < 30 (värdet 30 antas inte, eftersom vi betraktar det *öppna* intervallet $]-2, 2[$).
Så **svar: Värdemängden är** $[\mathbf{3}, \mathbf{30}[$.

A2) ML-utvecklingar:
$x + \cos x - e^x = x + (1 - \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^4)) - (1 + x + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3)) = -x^2 + \mathcal{O}(x^3)$
$x - \ln(1+x) = x - (x - \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3)) = \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3)$, så

$$\lim_{x \to 0} \frac{x + \cos x - e^x}{x - \ln(1+x)} = \lim_{x \to 0} \frac{-x^2 + \mathcal{O}(x^3)}{\frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3)} = \lim_{x \to 0} \frac{-1 + \mathcal{O}(x)}{\frac{1}{2} + \mathcal{O}(x)} = \frac{-1}{\frac{1}{2}} = -2.$$

Svar: Gränsvärdet är -2.

B2) ML-utvecklingar:
$1 + \ln(1+x) - e^x = 1 + (x - \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3)) - (1 + x + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3)) = -x^2 + \mathcal{O}(x^3)$
$1 - \cos x = 1 - (1 - \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^4)) = \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^4)$, så

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 + \ln(1+x) - e^x}{1 - \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{-x^2 + \mathcal{O}(x^3)}{\frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^4)} = \lim_{x \to 0} \frac{-1 + \mathcal{O}(x)}{\frac{1}{2} + \mathcal{O}(x^2)} = \frac{-1}{\frac{1}{2}} = -2.$$

Svar: Gränsvärdet är -2.

I A2) och B2) går det också bra att använda l'Hospitals regel (två gånger).

A3) $z = \frac{3^8}{2^{12}}(\frac{1}{\sqrt{3}} + i)^{15} = \frac{3^8}{2^{12}}(\frac{2}{\sqrt{3}})^{15}(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})^{15} = \frac{3^8}{2^{12}}\frac{2^{15}}{3^7\sqrt{3}}(e^{i\frac{\pi}{3}})^{15} = 2^3\sqrt{3}e^{i15\cdot\frac{\pi}{3}} = 8\sqrt{3}e^{i5\pi} = -8\sqrt{3}$.
Så **svar:** $\mathbf{z = -8\sqrt{3} + i0}$

B3) $z = \frac{3^8}{2^{12}}(1 + i\frac{1}{\sqrt{3}})^{15} = \frac{3^8}{2^{12}}(\frac{2}{\sqrt{3}})^{15}(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2})^{15} = \frac{3^8}{2^{12}}\frac{2^{15}}{3^7\sqrt{3}}(e^{i\frac{\pi}{6}})^{15} = 2^3\sqrt{3}e^{i15\cdot\frac{\pi}{6}} = 8\sqrt{3}e^{i5\cdot\frac{\pi}{2}} = 8\sqrt{3}i$.
Så **svar:** $\mathbf{z = 0 + i8\sqrt{3}}$