Institutionen för matematik
KTH
Bengt Ek

Svar till KS1 i Matematik 1 för K1 och Bio1, 18 september 2003

[Tryckfel kan förekomma]

A1) Låt $\alpha = \arccos\frac{4}{5}$ och $\beta = \arcsin\frac{5}{13}$.
Då gäller $\cos\alpha = \cos(\arccos\frac{4}{5}) = \frac{4}{5}$ och $\sin\beta = \sin(\arcsin\frac{5}{13}) = \frac{5}{13}$.
Eftersom $\alpha \in [0, \pi]$ har vi $\sin\alpha \geq 0$, så
$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-(\frac{4}{5})^2} = \sqrt{\frac{9}{5^2}} = \frac{3}{5}$.
Eftersom $\beta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ fås på samma sätt $\cos\beta \geq 0$ och
$\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} = \sqrt{1-(\frac{5}{13})^2} = \sqrt{\frac{13^2-5^2}{13^2}} = \sqrt{\frac{169-25}{13^2}} = \sqrt{\frac{144}{13^2}} = \frac{12}{13}$.
Sökt är $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \frac{4}{5}\cdot\frac{12}{13} - \frac{3}{5}\cdot\frac{5}{13} = \frac{33}{65}$.
Svar: $\mathbf{\frac{33}{65}}$.

B1) Låt $\alpha = \arcsin\frac{3}{5}$ och $\beta = \arccos\frac{5}{13}$.
Då gäller $\sin\alpha = \sin(\arcsin\frac{3}{5}) = \frac{3}{5}$ och $\cos\beta = \cos(\arccos\frac{5}{13}) = \frac{5}{13}$.
Eftersom $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ har vi $\cos\alpha \geq 0$, så
$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-(\frac{3}{5})^2} = \sqrt{\frac{16}{5^2}} = \frac{4}{5}$.
Eftersom $\beta \in [0, \pi]$ fås på samma sätt $\sin\beta \geq 0$ och
$\sin\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta} = \sqrt{1-(\frac{5}{13})^2} = \sqrt{\frac{13^2-5^2}{13^2}} = \sqrt{\frac{169-25}{13^2}} = \sqrt{\frac{144}{13^2}} = \frac{12}{13}$.
Sökt är $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \frac{4}{5}\cdot\frac{5}{13} - \frac{3}{5}\cdot\frac{12}{13} = -\frac{16}{65}$.
Svar: $-\mathbf{\frac{16}{65}}$.

A2) Låt P_n vara påståendet $1(3\cdot1+1)+2(3\cdot2+1)+\cdots+n(3n+1) = n(n+1)^2$.
Vi skall med induktion visa P_n för $n = 1, 2, \ldots$.
1) Bas: $n = 1$ ger $\mathrm{VL}_1 = 1(3\cdot1+1) = 4$ och $\mathrm{HL}_1 = 1(1+1)^2 = 4$, så P_1 är sant.
2) Steg: Antag P_k, dvs $1(3\cdot1+1)+2(3\cdot2+1)+\cdots+k(3k+1) = k(k+1)^2$.
Vi skall visa P_{k+1} (med hjälp av P_k).
$\mathrm{VL}_{k+1} = 1(3\cdot1+1)+2(3\cdot2+1)+\cdots+k(3k+1)+(k+1)(3(k+1)+1) =$
$\mathrm{VL}_k + (k+1)(3k+4) \overset{P_k}{=} \mathrm{HL}_k + (k+1)(3k+4) = k(k+1)^2 + (k+1)(3k+4) =$
$(k+1)(k(k+1)+(3k+4)) = (k+1)(k^2+4k+4) = (k+1)(k+2)^2 = \mathrm{HL}_{k+1}$,
så P_{k+1} är sant.
3) Eftersom vi har visat dels P_1 och dels $P_k \Rightarrow P_{k+1}$ för $k = 1, 2, \ldots$, följer det ur induktionsprincipen att P_n är sant för $n = 1, 2, \ldots$.

B2) Låt P_n vara påståendet $1(3\cdot 1-1)+2(3\cdot 2-1)+\cdots+n(3n-1)=n^2(n+1)$. Vi skall med induktion visa P_n för $n=1,2,\ldots$.
1) Bas: $n=1$ ger $\mathrm{VL}_1=1(3\cdot 1-1)=2$ och $\mathrm{HL}_1=1^2(1+1)=2$, så P_1 är sant.
2) Steg: Antag P_k, dvs $1(3\cdot 1-1)+2(3\cdot 2-1)+\cdots+k(3k-1)=k^2(k+1)$. Vi skall visa P_{k+1} (med hjälp av P_k).
$\mathrm{VL}_{k+1}=1(3\cdot 1-1)+2(3\cdot 2-1)+\cdots+k(3k-1)+(k+1)(3(k+1)-1)=$
$\mathrm{VL}_k+(k+1)(3k+2)\overset{P_k}{=}\mathrm{HL}_k+(k+1)(3k+2)=k^2(k+1)+(k+1)(3k+2)=$
$(k+1)(k^2+3k+2)=(k+1)(k+1)(k+2)=(k+1)^2(k+2)=\mathrm{HL}_{k+1}$,
så P_{k+1} är sant.
3) Eftersom vi har visat dels P_1 och dels $P_k\Rightarrow P_{k+1}$ för $k=1,2,\ldots$, följer det ur induktionsprincipen att P_n är sant för $n=1,2,\ldots$.

A3) Vi skall beräkna

$$\lim_{x\to 0}|x|^{-\frac{\cos x}{\ln|x|}}.$$

Eftersom $|x|=e^{\ln|x|}$ då $x\neq 0$, gäller då $|x|^{-\frac{\cos x}{\ln|x|}}=\left(e^{\ln|x|}\right)^{-\frac{\cos x}{\ln|x|}}=e^{\ln|x|(-\frac{\cos x}{\ln|x|})}=$ $e^{-\cos x}$. Gränsvärdet blir

$$\lim_{x\to 0}e^{-\cos x}=\left[\begin{array}{ll} e^t & \text{kontinuerlig} \\ \text{för alla } t & \end{array}\right]=e^{\lim_{x\to 0}(-\cos x)}=e^{-1}.$$

Svar: $\mathbf{e^{-1}}(=\frac{1}{e})$.

B3) Vi skall beräkna

$$\lim_{x\to 0}|x|^{-\frac{x^2+2}{\ln|x|}}.$$

Eftersom $|x|=e^{\ln|x|}$ då $x\neq 0$, gäller då $|x|^{-\frac{x^2+2}{\ln|x|}}=\left(e^{\ln|x|}\right)^{-\frac{x^2+2}{\ln|x|}}=e^{\ln|x|(-\frac{x^2+2}{\ln|x|})}=$ $e^{-(x^2+2)}$. Gränsvärdet blir

$$\lim_{x\to 0}e^{-(x^2+2)}=\left[\begin{array}{ll} e^t & \text{kontinuerlig} \\ \text{för alla } t & \end{array}\right]=e^{\lim_{x\to 0}(-(x^2+2))}=e^{-2}.$$

Svar: $\mathbf{e^{-2}}(=\frac{1}{e^2})$.