Institutionen för matematik
KTH
Bengt Ek

Svar till KS2 i Matematik 1 för Media1, 10 oktober 2002
[Tryckfel kan förekomma]

A1) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 4$ ger $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x^2 + x - 2) = 6(x+2)(x-1)$.
Vi får tabellen

x	-3		-2		1		3
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	13	$\nearrow$	24	$\searrow$	-3	$\nearrow$	49

och läser av att $f(x)$ antar alla värden ≥ -3 och < 49 (värdet 49 antas inte, eftersom vi betraktar det *öppna* intervallet $]-3, 3[$).
Så **värdemängden är** $[\mathbf{-3, 49}[$.

B1) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 7$ ger $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2) = 6(x+1)(x-2)$.
Vi får tabellen

x	-3		-1		2		3
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	-38	$\nearrow$	14	$\searrow$	-13	$\nearrow$	-2

och läser av att $f(x)$ antar alla värden > -38 och ≤ 14 (värdet -38 antas inte, eftersom vi betraktar det *öppna* intervallet $]-3, 3[$).
Så **värdemängden är** $]\mathbf{-38, 14}]$.

A2) Den allmänna lösningen till den inhomogena ekvationen

$$y'' + 3y' = 3x + 4$$

ges av $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$.
y_h, den allmänna lösningen till den homogena ekvationen, fås med hjälp av den karakteristiska ekvationen för differentialekvationen: $r^2 + 3r = 0$, med lösningar $r_1 = 0$ och $r_2 = -3$.
Detta ger $y_h(x) = A + Be^{-3x}$, A och B godtyckliga konstanter.
För y_p, en partikulärlösning till den inhomogena ekvationen, ger ansatsen $y(x) = ax^2 + bx$ att $y' = 2ax + b$ och $y'' = 2a$.
Insättning i ekvationen ger $2a + 3(2ax + b) = 3x + 4$, vilket är uppfyllt om $a = \frac{1}{2}$ och $b = 1$.
En partikulärlösning är alltså $y_p(x) = \frac{x^2}{2} + x$.
Vi får svaret: **Den allmänna lösningen är $\mathbf{y(x) = \frac{x^2}{2} + x + A + Be^{-3x}}$, A och B godtyckliga konstanter.**

B2) Den allmänna lösningen till den inhomogena ekvationen

$$y'' + 2y' = 2x - 1$$

ges av $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$.
y_h, den allmänna lösningen till den homogena ekvationen, fås med hjälp av den karakteristiska ekvationen för differentialekvationen: $r^2 + 2r = 0$, med lösningar $r_1 = 0$ och $r_2 = -2$.
Detta ger $y_h(x) = A + Be^{-2x}$, A och B godtyckliga konstanter.
För y_p, en partikulärlösning till den inhomogena ekvationen, ger ansatsen $y(x) = ax^2 + bx$ att $y' = 2ax + b$ och $y'' = 2a$.
Insättning i ekvationen ger $2a + 2(2ax + b) = 2x - 1$, vilket är uppfyllt om $a = \frac{1}{2}$ och $b = -1$.
En partikulärlösning är alltså $y_p(x) = \frac{x^2}{2} - x$.
Vi får svaret: **Den allmänna lösningen är $\mathbf{y(x) = \frac{x^2}{2} - x + A + Be^{-2x}}$, A och B godtyckliga konstanter.**

A3) Vi har $\int \frac{1}{x^3}\cos(\frac{1}{x})\,dx$.
Eftersom derivatan av $\frac{1}{x}$ är $-\frac{1}{x^2}$, som finns som en faktor i integranden, prövar vi substitutionen $t = \frac{1}{x}$:
$\int \frac{1}{x^3}\cos(\frac{1}{x})\,dx = \begin{bmatrix} t = \frac{1}{x} \\ dt = -\frac{1}{x^2}dx \end{bmatrix} = \int -t\cos t\,dt =$ [partiell integration] $= -t\sin t - \int -1\cdot \sin t\,dt = -t\sin t - \cos t + C = -\mathbf{\frac{1}{x}}\sin(\mathbf{\frac{1}{x}}) - \cos(\mathbf{\frac{1}{x}}) + \mathbf{C}$.

B3) Vi har $\int \frac{1}{x^3}\sin(\frac{1}{x})\,dx$.
Eftersom derivatan av $\frac{1}{x}$ är $-\frac{1}{x^2}$, som finns som en faktor i integranden, prövar vi substitutionen $t = \frac{1}{x}$:
$\int \frac{1}{x^3}\sin(\frac{1}{x})\,dx = \begin{bmatrix} t = \frac{1}{x} \\ dt = -\frac{1}{x^2}dx \end{bmatrix} = \int -t\sin t\,dt =$ [partiell integration] $= -t(-\cos t) - \int -1\cdot (-\cos t)\,dt = t\cos t - \sin t + C = \mathbf{\frac{1}{x}}\cos(\mathbf{\frac{1}{x}}) - \sin(\mathbf{\frac{1}{x}}) + \mathbf{C}$.