

Svar till KS2 i Matematik 1 för Media1, 10 oktober 2002

[Tryckfel kan förekomma]

A1) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 4$ ger $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x^2 + x - 2) = 6(x+2)(x-1)$.
 Vi får tabellen

x	-3	-2	1	3			
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	13	↗	24	↘	-3	↗	49

och läser av att $f(x)$ antar alla värden ≥ -3 och < 49 (värdet 49 antas inte, eftersom vi betraktar det öppna intervallet $] -3, 3[$).

Så **värdeområdet** är $[-3, 49[$.

B1) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 7$ ger $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2) = 6(x+1)(x-2)$.
 Vi får tabellen

x	-3	-1	2	3			
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	-38	↗	14	↘	-13	↗	-2

och läser av att $f(x)$ antar alla värden > -38 och ≤ 14 (värdet -38 antas inte, eftersom vi betraktar det öppna intervallet $] -3, 3[$).

Så **värdeområdet** är $] -38, 14]$.

A2) Den allmänna lösningen till den inhomogena ekvationen

$$y'' + 3y' = 3x + 4$$

ges av $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$.

y_h , den allmänna lösningen till den homogena ekvationen, fås med hjälp av den karakteristiska ekvationen för differentialekvationen: $r^2 + 3r = 0$, med lösningar $r_1 = 0$ och $r_2 = -3$. Detta ger $y_h(x) = A + Be^{-3x}$, A och B godtyckliga konstanter.

För y_p , en partikulärlösning till den inhomogena ekvationen, ger ansatsen $y(x) = ax^2 + bx$ att $y' = 2ax + b$ och $y'' = 2a$.

Insättning i ekvationen ger $2a + 3(2ax + b) = 3x + 4$, vilket är uppfyllt om $a = \frac{1}{2}$ och $b = 1$.

En partikulärlösning är alltså $y_p(x) = \frac{x^2}{2} + x$.

Vi får svaret: **Den allmänna lösningen är $y(x) = \frac{x^2}{2} + x + A + Be^{-3x}$, A och B godtyckliga konstanter.**

B2) Den allmänna lösningen till den inhomogena ekvationen

$$y'' + 2y' = 2x - 1$$

ges av $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$.

y_h , den allmänna lösningen till den homogena ekvationen, fås med hjälp av den karakteristiska ekvationen för differentialekvationen: $r^2 + 2r = 0$, med lösningar $r_1 = 0$ och $r_2 = -2$. Detta ger $y_h(x) = A + Be^{-2x}$, A och B godtyckliga konstanter.

För y_p , en partikulärlösning till den inhomogena ekvationen, ger ansatsen $y(x) = ax^2 + bx$ att $y' = 2ax + b$ och $y'' = 2a$.

Insättning i ekvationen ger $2a + 2(2ax + b) = 2x - 1$, vilket är uppfyllt om $a = \frac{1}{2}$ och $b = -1$.

En partikulärlösning är alltså $y_p(x) = \frac{x^2}{2} - x$.

Vi får svaret: **Den allmänna lösningen är $y(x) = \frac{x^2}{2} - x + A + Be^{-2x}$, A och B godtyckliga konstanter.**

A3) Vi har $\int \frac{1}{x^3} \cos(\frac{1}{x}) dx$.

Eftersom derivatan av $\frac{1}{x}$ är $-\frac{1}{x^2}$, som finns som en faktor i integranden, prövar vi substitutionen $t = \frac{1}{x}$:

$$\int \frac{1}{x^3} \cos(\frac{1}{x}) dx = \left[\begin{array}{l} t = \frac{1}{x} \\ dt = -\frac{1}{x^2} dx \end{array} \right] = \int -t \cos t dt = [\text{partiell integration}] = -t \sin t - \int -1 \cdot \sin t dt = -t \sin t - \cos t + C = -\frac{1}{x} \sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}) + C.$$

B3) Vi har $\int \frac{1}{x^3} \sin(\frac{1}{x}) dx$.

Eftersom derivatan av $\frac{1}{x}$ är $-\frac{1}{x^2}$, som finns som en faktor i integranden, prövar vi substitutionen $t = \frac{1}{x}$:

$$\int \frac{1}{x^3} \sin(\frac{1}{x}) dx = \left[\begin{array}{l} t = \frac{1}{x} \\ dt = -\frac{1}{x^2} dx \end{array} \right] = \int -t \sin t dt = [\text{partiell integration}] = -t(-\cos t) - \int -1 \cdot (-\cos t) dt = t \cos t - \sin t + C = \frac{1}{x} \cos(\frac{1}{x}) - \sin(\frac{1}{x}) + C.$$