Institutionen för matematik
KTH
Bengt Ek

Svar till KS1 i Matematik 1 för Media1, 10 september 2002
[Tryckfel kan förekomma]

A1) Låt P_n vara påståendet $1\cdot 2^2+2\cdot 3^2+\cdots+n(n+1)^2=\frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(3n+5)$.
Vi skall med induktion visa P_n för $n=1,2,\ldots$.
1) Bas: $n=1$ ger $\mathrm{VL}_1=1\cdot 2^2=4$ och $\mathrm{HL}_1=\frac{1}{12}1\cdot 2\cdot 3\cdot 8=4$, så P_1 är sant.
2) Steg: Antag P_k, dvs $1\cdot 2^2+2\cdot 3^2+\cdots+k(k+1)^2=\frac{1}{12}k(k+1)(k+2)(3k+5)$.
Vi skall visa P_{k+1} (med hjälp av P_k).
$\mathrm{VL}_{k+1}=1\cdot 2^2+2\cdot 3^2+\cdots+k(k+1)^2+(k+1)(k+2)^2=\mathrm{VL}_k+(k+1)(k+2)^2\overset{P_k}{=}\mathrm{HL}_k+(k+1)(k+2)^2=\frac{1}{12}k(k+1)(k+2)(3k+5)+(k+1)(k+2)^2=\frac{1}{12}(k+1)(k+2)[k(3k+5)+12(k+2)]=\frac{1}{12}(k+1)(k+2)(3k^2+17k+24)$,
$\mathrm{HL}_{k+1}=\frac{1}{12}(k+1)(k+2)(k+3)(3k+8)=\frac{1}{12}(k+1)(k+2)[(k+3)(3k+8)]=\frac{1}{12}(k+1)(k+2)(3k^2+17k+24)=\mathrm{VL}_{k+1}$,
så P_{k+1} är sant.
3) Eftersom vi har visat dels P_1 och dels $P_k\Rightarrow P_{k+1}$ för $k=1,2,\ldots$, följer det ur induktionsprincipen att P_n är sant för $n=1,2,\ldots$.

B1) Låt P_n vara påståendet $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$.
Vi skall med induktion visa P_n för $n=1,2,\ldots$.
1) Bas: $n=1$ ger $\mathrm{VL}_1=\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2}$ och $\mathrm{HL}_1=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$, så P_1 är sant.
2) Steg: Antag P_k, dvs $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}$.
Vi skall visa P_{k+1} (med hjälp av P_k).
$\mathrm{VL}_{k+1}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\mathrm{VL}_k+\frac{1}{(k+1)(k+2)}\overset{P_k}{=}\mathrm{HL}_k+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}=\frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}=\mathrm{HL}_{k+1}$,
så P_{k+1} är sant.
3) Eftersom vi har visat dels P_1 och dels $P_k\Rightarrow P_{k+1}$ för $k=1,2,\ldots$, följer det ur induktionsprincipen att P_n är sant för $n=1,2,\ldots$.

A2) $\sqrt{\cos 3x}=\sqrt{\cos 2x}\overset{\text{kvadrera}}{\Rightarrow}\cos 3x=\cos 2x\Leftrightarrow 3x=\pm 2x+n\cdot 2\pi, n$ heltal, dvs $x=n\cdot 2\pi$ eller $x=n\cdot\frac{2\pi}{5}, n$ heltal.
Eftersom vi bara har $\Rightarrow$, inte överallt $\Leftrightarrow$, ovan kan vi ha fått "falska rötter". De funna x-värdena är lösningar till den givna ekvationen precis om $\sqrt{\cos 3x}$ och $\sqrt{\cos 2x}$ är definierade, dvs precis om $\cos 2x(=\cos 3x)\geq 0$, dvs $-\frac{\pi}{2}+m\cdot 2\pi\leq 2x\leq\frac{\pi}{2}+m\cdot 2\pi$ för något heltal m. Man finner att alla lösningar till ekvationen ges av $\mathbf{x}=\mathbf{n}\cdot\mathbf{2}\pi$ och $\mathbf{x}=\pm\frac{\mathbf{4}\pi}{\mathbf{5}}+\mathbf{n}\cdot\mathbf{2}\pi, n$ heltal.

B2) $\ln(\sin 3x) = \ln(\sin 2x) \overset{\text{exponentiera}}{\Rightarrow} \sin 3x = \sin 2x \Leftrightarrow 3x = 2x + n \cdot 2\pi$ eller $3x = \pi - 2x + n \cdot 2\pi, n$ heltal,
dvs $x = n \cdot 2\pi$ eller $x = \frac{\pi}{5} + n \cdot \frac{2\pi}{5}, n$ heltal.
Eftersom vi bara har $\Rightarrow$, inte överallt $\Leftrightarrow$, ovan kan vi ha fått "falska rötter". De funna x-värdena är lösningar till den givna ekvationen precis om $\ln(\sin 3x)$ och $\ln(\sin 2x)$ är definierade, dvs precis om $\sin 2x (= \sin 3x) > 0$, dvs $m \cdot 2\pi < 2x < \pi + m \cdot 2\pi$ för något heltal m. Man finner att alla lösningar till ekvationen ges av $\mathbf{x} = \frac{\pi}{\mathbf{5}} + \mathbf{n} \cdot \mathbf{2}\pi$ och $\mathbf{x} = -\frac{\mathbf{3}\pi}{\mathbf{5}} + \mathbf{n} \cdot \mathbf{2}\pi, n$ heltal.

A3) Vi skall beräkna $\lim_{x\to\infty} e^{\frac{3x^2+\ln x}{x^2+1}}$.
Eftersom $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+\ln x}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{3+\frac{\ln x}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{3+0}{1+0} = 3$, där vi använt det kända gränsvärdet $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$ om $\alpha > 0$, blir

$$\lim_{x\to\infty} e^{\frac{3x^2+\ln x}{x^2+1}} = \left[\begin{array}{ll} e^t & \text{kontinuerlig} \\ \text{för } t = 3 & \end{array}\right] = \lim_{t\to 3} e^t = e^3.$$

Så svaret: $\mathbf{e^3}$.

B3) Vi skall beräkna $\lim_{x\to\infty} \arctan(x \sin \frac{1}{x})$.
Eftersom $\lim_{x\to\infty} x \sin \frac{1}{x} = \left[\begin{array}{l} t = \frac{1}{x} \\ x \to \infty \Rightarrow t \to 0 \end{array}\right] = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} =$ $\left[\text{ känt gränsvärde } \right] = 1$, blir

$$\lim_{x\to\infty} \arctan(x \sin \tfrac{1}{x}) = \left[\begin{array}{ll} \arctan t & \text{kontin-} \\ \text{uerlig för } t = 1 & \end{array}\right] = \lim_{t\to 1} \arctan t = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Så svaret: $\frac{\pi}{\mathbf{4}}$.