Institutionen för matematik
KTH
Bengt Ek

Svar till KS2 i Matematik 1 för Media1, 10 oktober 2001

[Tryckfel kan förekomma]

A1) Implicit derivering av ekvationen $\sin(x+y)+\arctan(x+2y)=\frac{\pi}{4}$ ger $\cos(x+y)(1+y')+\frac{1}{1+(x+2y)^2}(1+2y')=0$.
Insättning av $x=-1$ och $y=1$ ger $(1+y')+\frac{1}{2}(1+2y')=0$,
så **svaret:** $y'(-1)=-\frac{3}{4}$.

B1) Implicit derivering av ekvationen $\sin(x+y)+\ln(2x+y)=\ln 2$ ger $\cos(x+y)(1+y')+\frac{1}{2x+y}(2+y')=0$.
Insättning av $x=2$ och $y=-2$ ger $(1+y')+\frac{1}{2}(2+y')=0$,
så **svaret:** $y'(2)=-\frac{4}{3}$.

A2) Eftersom $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+O(x^4)$, gäller $\frac{\ln(1+x)}{x}=1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+O(x^3)$. $\sqrt{1+t}=(1+t)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{t}{2}-\frac{t^2}{8}+O(t^3)$ ger med $t=-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+O(x^3)=-\frac{x}{2}+O(x^2)=O(x)$ att

$$\sqrt{\frac{\ln(1+x)}{x}}=1+\frac{1}{2}\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+O(x^3)\right)-\frac{1}{8}\left(-\frac{x}{2}+O(x^2)\right)^2+O(x^3)=$$
$$=1+\frac{1}{2}\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+O(x^3)\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{x^2}{4}+O(x^3)\right)+O(x^3)=$$
$$=1-\frac{x}{4}+\frac{13}{96}x^2+O(x^3).$$

Så **svaret:** $1-\frac{x}{4}+\frac{13}{96}x^2$.

B2) Eftersom $\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+O(x^7)$, gäller $\frac{\arctan x}{x}=1-\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{5}+O(x^6)$. $\sqrt{1+t}=(1+t)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{t}{2}-\frac{t^2}{8}+O(t^3)$ ger med $t=-\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{5}+O(x^6)=-\frac{x^2}{3}+O(x^4)=O(x^2)$ att

$$\sqrt{\frac{\arctan x}{x}}=1+\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{5}+O(x^6)\right)-\frac{1}{8}\left(-\frac{x^2}{3}+O(x^4)\right)^2+O(x^6)=$$
$$=1+\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{5}+O(x^6)\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{x^4}{9}+O(x^6)\right)+O(x^6)=$$
$$=1-\frac{x^2}{6}+\frac{31}{360}x^4+O(x^6).$$

Så **svaret:** $1-\frac{x^2}{6}+\frac{31}{360}x^4$.

A3) Den allmänna lösningen till den inhomogena ekvationen

$$y'' + y' - 2y = \sin x$$

ges av $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$.
y_h, den allmänna lösningen till den homogena ekvationen, fås med hjälp av den karakteristiska ekvationen för differentialekvationen: $r^2 + r - 2 = 0$, med lösningar $r_1 = 1$ och $r_2 = -2$.
Detta ger $y_h(x) = Ae^x + Be^{-2x}$, A och B godtyckliga konstanter.
y_p, en partikulärlösning till den inhomogena ekvationen, kan fås som Im u_p, där den komplexa funktionen $u(x)$ uppfyller $u'' + u' - 2u = e^{ix}$.
För u_p ansätter vi $u(x) = ae^{ix}$, vilket insatt i ekvationen ger
$(-a + ia - 2a)e^{ix} = e^{ix}$, dvs ansatsen ger en lösning om $a = \frac{1}{-3+i} = \frac{1}{10}(-3-i)$.
Så $y_p(x) =$ Im $\frac{1}{10}(-3-i)e^{ix} =$ Im $\frac{1}{10}(-3-i)(\cos x + i\sin x) = \frac{1}{10}(-\cos x - 3\sin x)$.
Svar: Den allmänna lösningen är $y(x) = Ae^x + Be^{-2x} + \frac{1}{10}(-\cos x - 3\sin x)$, A och B godtyckliga konstanter.

B3) Den allmänna lösningen till den inhomogena ekvationen

$$y'' - y' - 2y = \cos x$$

ges av $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$.
y_h, den allmänna lösningen till den homogena ekvationen, fås med hjälp av den karakteristiska ekvationen för differentialekvationen: $r^2 - r - 2 = 0$, med lösningar $r_1 = 2$ och $r_2 = -1$.
Detta ger $y_h(x) = Ae^{2x} + Be^{-x}$, A och B godtyckliga konstanter.
y_p, en partikulärlösning till den inhomogena ekvationen, kan fås som Re u_p, där den komplexa funktionen $u(x)$ uppfyller $u'' - u' - 2u = e^{ix}$.
För u_p ansätter vi $u(x) = ae^{ix}$, vilket insatt i ekvationen ger
$(-a - ia - 2a)e^{ix} = e^{ix}$, dvs ansatsen ger en lösning om $a = \frac{1}{-3-i} = \frac{1}{10}(-3+i)$.
Så $y_p(x) =$ Re $\frac{1}{10}(-3+i)e^{ix} =$ Re $\frac{1}{10}(-3+i)(\cos x + i\sin x) = \frac{1}{10}(-3\cos x - \sin x)$.
Svar: Den allmänna lösningen är $y(x) = Ae^{2x} + Be^{-x} + \frac{1}{10}(-3\cos x - \sin x)$, A och B godtyckliga konstanter.