

Institutionen för matematik

KTH

Bengt Ek

Svar till KS1 i Matematik 1 för Media1, 19 september 2001

[Tryckfel kan förekomma]

A1) Låt P_n vara påståendet att $4 \cdot 6^n + 3 \cdot 13^n$ är delbart med 7.

Vi skall med induktion visa P_n för $n = 1, 2, \dots$.

Bas: P_1 är att $4 \cdot 6^1 + 3 \cdot 13^1 = 24 + 39 = 63 = 7 \cdot 9$ är delbart med 7, så P_1 är sant.

Steg: Antag P_k , dvs att $4 \cdot 6^k + 3 \cdot 13^k$ är delbart med 7, dvs att det finns ett heltal m så att $4 \cdot 6^k + 3 \cdot 13^k = 7m$.

Vi skall visa P_{k+1} (med hjälp av P_k).

$$4 \cdot 6^{k+1} + 3 \cdot 13^{k+1} = 4 \cdot 6^{k+1} + 3 \cdot 13^k \cdot 13 \stackrel{\text{enligt } P_k}{=} 4 \cdot 6^{k+1} + (7m - 4 \cdot 6^k) \cdot 13 = 7 \cdot 13m + 4 \cdot 6^k(6 - 13) = 7(13m - 4 \cdot 6^k), \text{ dvs } P_{k+1} \text{ är sant.}$$

Eftersom vi har visat P_1 och $P_k \Rightarrow P_{k+1}$ för $k = 1, 2, \dots$, följer det ur induktionsprincipen att P_n är sant för $n = 1, 2, \dots$.

B1) Låt P_n vara påståendet att $5 \cdot 8^n + 4 \cdot 17^n$ är delbart med 9.

Vi skall med induktion visa P_n för $n = 1, 2, \dots$.

Bas: P_1 är att $5 \cdot 8^1 + 4 \cdot 17^1 = 40 + 68 = 108 = 9 \cdot 12$ är delbart med 9, så P_1 är sant.

Steg: Antag P_k , dvs att $5 \cdot 8^k + 4 \cdot 17^k$ är delbart med 9, dvs att det finns ett heltal m så att $5 \cdot 8^k + 4 \cdot 17^k = 9m$.

Vi skall visa P_{k+1} (med hjälp av P_k).

$$5 \cdot 8^{k+1} + 4 \cdot 17^{k+1} = 5 \cdot 8^{k+1} + 4 \cdot 17^k \cdot 17 \stackrel{\text{enligt } P_k}{=} 5 \cdot 8^{k+1} + (9m - 5 \cdot 8^k) \cdot 17 = 9 \cdot 17m + 5 \cdot 8^k(8 - 17) = 9(17m - 5 \cdot 8^k), \text{ dvs } P_{k+1} \text{ är sant.}$$

Eftersom vi har visat P_1 och $P_k \Rightarrow P_{k+1}$ för $k = 1, 2, \dots$, följer det ur induktionsprincipen att P_n är sant för $n = 1, 2, \dots$.

A2) Vi har $f(x) = -\frac{2}{x^2}$, $-5 \leq x < -2$ och skall finna dess inversfunktion.

Inversfunktionen existerar om och endast om ekvationen $x = f(y)$ har högst en lösning y i f 's definitionsmängd för varje x . Denna lösning ger då $f^{-1}(x)$.

$$x = f(y), \quad y \in D_f \Leftrightarrow x = -\frac{2}{y^2}, \quad -5 \leq y < -2 \Leftrightarrow y^2 = -\frac{2}{x}, \quad -5 \leq y < -2 \Leftrightarrow y = -\sqrt{-\frac{2}{x}}, \quad -5 \leq y < -2 \text{ (eftersom } y < 0 \text{ i definitionsmängden har ekvationen bara en lösning, med minustecken).}$$

Så $f^{-1}(x)$ existerar och är $-\sqrt{-\frac{2}{x}}$. Dess definitionsmängd ges av $D_{f^{-1}} = V_f$.

Intervallerna $[-5, -2[$ avbildas av x^2 på $]4, 25]$ och av $\frac{2}{x^2}$ på $[\frac{2}{25}, \frac{1}{2}[$ och av $f(x)$ på $] -\frac{1}{2}, -\frac{2}{25}] = V_f$.

$$\text{Så } f^{-1}(x) = -\sqrt{-\frac{2}{x}}, \quad -\frac{1}{2} < x \leq -\frac{2}{25}.$$

B2) Vi har $f(x) = -\frac{3}{x^2}$, $-6 < x \leq -3$ och skall finna dess inversfunktion. Inversfunktionen existerar om och endast om ekvationen $x = f(y)$ har högst en lösning y i f 's definitionsmängd för varje x . Denna lösning ger då $f^{-1}(x)$.
 $x = f(y)$, $y \in D_f \Leftrightarrow x = -\frac{3}{y^2}$, $-6 < y \leq -3 \Leftrightarrow y^2 = -\frac{3}{x}$, $-6 < y \leq -3 \Leftrightarrow y = -\sqrt{-\frac{3}{x}}$, $-6 < y \leq -3$ (eftersom $y < 0$ i definitionsmängden har ekvationen bara en lösning, med minustecken).

Så $f^{-1}(x)$ existerar och är $-\sqrt{-\frac{3}{x}}$. Dess definitionsmängd ges av $D_{f^{-1}} = V_f$. Intervall $] -6, -3]$ avbildas av x^2 på $[9, 36[$ och av $\frac{3}{x^2}$ på $] \frac{1}{12}, \frac{1}{3}]$ och av $f(x)$ på $[-\frac{1}{3}, -\frac{1}{12}[= V_f$.

Så $f^{-1}(x) = -\sqrt{-\frac{3}{x}}$, $-\frac{1}{3} \leq x < -\frac{1}{12}$.

A3)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln 7x^4 + 3x^3 - 12x}{1 + \sin 2x - 4x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{-3} \ln 7 + x^{-3} \cdot 4 \ln x + 3 - 12x^{-2}}{x^{-3} + x^{-3} \sin 2x - 4} =$$

$$\frac{\lim_{x \rightarrow \infty} (x^{-3} \ln 7 + 4 \cdot x^{-3} \ln x + 3 - 12x^{-2})}{\lim_{x \rightarrow \infty} (x^{-3} + x^{-3} \sin 2x - 4)} = \frac{0 + 0 + 3 - 0}{0 + 0 - 4} = -\frac{3}{4},$$

där vi har använt det kända gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-\alpha} \ln x = 0$, om $\alpha > 0$, och att $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-3} \sin 2x = 0$, eftersom $-x^{-3} \leq x^{-3} \sin 2x \leq x^{-3}$ och $\lim_{x \rightarrow \infty} \pm x^{-3} = 0$ (instängningsprincipen).

B3)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos 3x + 2x^3 - 11x}{3 - \ln 7x^5 - 5x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{-3} \cos 3x + 2 - 11x^{-2}}{3x^{-3} - x^{-3} \ln 7 - x^{-3} \cdot 5 \ln x - 5} =$$

$$\frac{\lim_{x \rightarrow \infty} (x^{-3} \cos 3x + 2 - 11x^{-2})}{\lim_{x \rightarrow \infty} (3x^{-3} - x^{-3} \ln 7 - 5 \cdot x^{-3} \ln x - 5)} = \frac{0 + 2 - 0}{0 - 0 - 0 - 5} = -\frac{2}{5},$$

där vi har använt det kända gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-\alpha} \ln x = 0$, om $\alpha > 0$, och att $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-3} \cos 3x = 0$, eftersom $-x^{-3} \leq x^{-3} \cos 3x \leq x^{-3}$ och $\lim_{x \rightarrow \infty} \pm x^{-3} = 0$ (instängningsprincipen).