

Institutionen för matematik

KTH

Bengt Ek

April 2004

ännu preliminär version

KOMPLETTERINGSMATERIAL TILL KURSEN 5B1928 LOGIK FÖR D1:

K4 Något om mängdteori

Materialet i de inramade avsnitten tas inte upp på tentamen.

K4.0 Inledning, om mängder

Mängdteorin kan ses som grunden för all matematik. På dessa sidor illustreras hur egenskaperna för de naturliga talen kan uttryckas med hjälp av mängder, dvs genom att definiera talen till att **vara** vissa mängder och härleda talens egenskaper ur allmänna egenskaper för mängder. Detta kommer också att naturligen leda oss till två olika sätt att generalisera de naturliga talen till "oändliga tal" och att visa att själva begreppet *mängd* inte är så självklart som man kunde tro.

Vi skall dock till en början betrakta mängdbegreppet som oproblematiskt. En mängd kan då ses som en "matematisk påse" som kan innehålla olika (matematiska) objekt, kallade mängdens **element**.

Det kanske är bättre att säga att påsen innehåller pekare till objekt - samma objekt kan ju vara element i olika mängder. Det viktiga är att det för varje objekt a och varje mängd M entydigt gäller att objektet tillhör mängden, betecknat $a \in M$, eller inte, $a \notin M$. Två mängder som har precis samma element är samma mängd, $M = N$ omm för alla x gäller $x \in M \Leftrightarrow x \in N$.

I mängdteorin sysslar man oftast **bara** med mängder, dvs alla elementen i mängderna är också mängder.

Beteckningar:

$\{x \mid Px\}$: mängden av alla objekt med egenskapen P . (Vi kommer dock att se att detta inte för alla P definierar en mängd(!).)

$\{x \in M \mid Px\}$: mängden av alla element i mängden M med egenskapen P .

$M \subseteq N$, M är en **delmängd** till N : varje element i M ligger i N , $x \in M \Rightarrow x \in N$, för alla x .

$M \subset N$, M är en **strikt delmängd** till N : varje element i M ligger i N och det finns (minst) ett element i N som inte tillhör M .

$M \cup N$, **unionen** av M och N : $\{x \mid x \in M \text{ eller } x \in N\}$.

$M \cap N$, **skärningen** eller **snittet** av M och N : $\{x \in M \mid x \in N\}$.

$M \setminus N$, **differensmängden** mellan M och N : $\{x \in M \mid x \notin N\}$.

$\emptyset$, den **tomma mängden** : $\{x \mid x \neq x\}$, en "tom påse".

Notera skillnaden mellan $\emptyset$ och $\{\emptyset\}$: $\emptyset$ har inga element, medan $\{\emptyset\}$, en påse som innehåller en tom påse, har ett element, nämligen $\emptyset$.

Märk också att $\in, \notin, \subseteq, \subset$ är **relationer**, t.ex. är ju $x \in M$ och $M \subset N$ påståenden, medan $\cup, \cap, \setminus$ är **operationer** (funktioner), t.ex. är $M \cup N$ och $M \setminus N$ mängder.

K4.1 Ordinaltal

K4.1.1 Definition, viktiga egenskaper

Då vi skall definiera det naturliga talet n till att vara en mängd, verkar det rimligt att välja en mängd med n element. Det är inte självklart **vilka** element man skall ta, men detta räcker för att bestämma hur talet 0 skall definieras. Vi låter $0 = \emptyset$, den enda mängden med 0 element. För att kunna definiera talen rekursivt, dvs varje tal med hjälp av de föregående, tar vi $1 = \{0\} = \{\emptyset\}$. På samma sätt låter vi $2 = \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ och allmänt

$$n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}.$$

Då får vi efterföljarfunktionen

$$S(n) = n + 1 = n \cup \{n\} \quad (!)$$

och ordningen mellan naturliga tal är lätt att beskriva:

$$m < n \Leftrightarrow m \subset n \Leftrightarrow m \in n.$$

I allmänhet är det mycket viktigt att noga skilja mellan $a \subset b$ (alla a :s element är också element i b) och $a \in b$ (a är ett element i b), men för de naturliga talen (och övriga ordinaltal, se nedan) sammanfaller begreppen!

Med ovanstående definitioner är det naturligt att uppfatta $\omega = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ som ett nytt tal som kommer efter alla de naturliga talen, ett "oändligt tal". Efter ω kommer då ännu ett, större, oändligt tal,

$$S(\omega) = \omega + 1 = \omega \cup \{\omega\} = \{0, 1, 2, 3, \dots, \omega\}.$$

På samma sätt fortsätter det med större och större "oändligheter":

$$\begin{aligned} \omega + 2 &= S(\omega + 1) = \{0, 1, 2, \dots, \omega, \omega + 1\} \\ &\vdots \\ \omega + \omega &= \omega \cdot 2 = \{0, 1, 2, \dots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \dots\} \\ \omega \cdot 2 + 1 &= S(\omega \cdot 2) = \{0, 1, 2, \dots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \dots, \omega \cdot 2\} \\ &\vdots \\ \omega \cdot 3 &= \{0, 1, 2, \dots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \dots, \omega \cdot 2, \omega \cdot 2 + 1, \omega \cdot 2 + 2, \dots\} \\ &\vdots \\ \omega \cdot \omega &= \omega^2 = \{\omega \cdot m + n \mid m, n \in \omega\} \\ \omega^2 + 1 &= S(\omega^2) \\ &\vdots \\ \omega^2 + \omega & \\ &\vdots \\ \omega^2 + \omega \cdot 2 & \\ &\vdots \\ \omega^2 \cdot 2 & \\ &\vdots \\ \omega^2 \cdot \omega &= \omega^3 = \{\omega^2 \cdot m + \omega \cdot n + p \mid m, n, p \in \omega\} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c}
\vdots \\
\omega^\omega = \{\omega^k \cdot n_k + \omega^{k-1} \cdot n_{k-1} + \dots + \omega \cdot n_1 + n_0 \mid k, n_k, \dots, n_0 \in \omega\} \\
\omega^\omega + 1 = S(\omega^\omega) \\
\vdots \\
\omega^{\omega^\omega} \\
\vdots \\
\varepsilon = \omega^{\omega^\omega} = \omega^\varepsilon \quad (!) \\
\vdots
\end{array}$$

Här är $\omega, \omega \cdot 2, \omega \cdot 3, \dots, \omega^2, \omega^2 + \omega, \dots$ själva inte efterföljare till några "tal" (det handlar alltså **inte** om elementen i en icke-standardmodell för Peanos axiom).

Vi ger nu en formell definition av ordinaltal och skall visa att de så införda talen har "rätt" egenskaper.

Definition:

Ett **ordinaltal** (eng. ordinal) är en mängd X som är välordnad med relationen $\subset$ och sådan att $X_a = a$ för alla $a \in X$.

Här är, som i avsnittet om välordning i K1, $X_a = \{x \in X \mid x < a \text{ (dvs } x \subset a)\}$, segmentet av X som bestäms av a . Att X är välordnad med $\subset$ som ordningsrelation betyder, som vi minns, bl.a. att om $a, b \in X$ gäller (precis) en av $a \subset b, a = b, b \subset a$.

Finns det några ordinaltal? Hur kan de se ut? En möjlighet är att $X = \emptyset$ (vi betraktar $\emptyset$ som en välordnad mängd, trots att vi tidigare inte har tillåtit tolkningar med tomma domäner). Om $X \neq \emptyset$, finns ett $a \in X$ som är minst i X (välordning), så $a = X_a = \emptyset$. $1 = \{\emptyset\}$ är tydligen ett ordinaltal, liksom alla andra naturliga tal så som vi definierat dem. Som vi såg i förra avsnittet finns det **många** fler ordinaltal!

I fortsättningen låter vi, som brukligt är, små grekiska bokstäver från början av alfabetet som $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ beteckna ordinaltal. Vi skall också beteckna ordningen (som ju är $\subset$) mellan elementen i ett ordinaltal med $<$.

Följande viktiga egenskaper för ordinaltal bevisas med den ganska abstrakta definitionen ovan. Man kan se att de stämmer med vad man kunde vänta sig efter den tidigare beskrivningen. Bevisen sparas till nästa avsnitt.

Viktiga egenskaper för ordinaltal

Låt α, β vara ordinaltal. Då gäller:

- För $x, y \in \alpha$ gäller $x < y \Leftrightarrow x \subset y \Leftrightarrow x \in y$
- α är en **transitiv mängd**, dvs $y \in x$ och $x \in \alpha$ ger $y \in \alpha$
- Alla element i α är ordinaltal

Definition: Om α, β är ordinaltal låter vi $\alpha < \beta$ betyda $\alpha \subset \beta$.

Detta stämmer ju med relationen $<$ mellan elementen i ett ordinaltal.

- Det gäller endera av $\alpha < \beta, \alpha = \beta$ och $\beta < \alpha$.
- Varje mängd $\mathcal{M}$ av ordinaltal är välordnad.

- Det gäller $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha \subset \beta \Leftrightarrow \alpha \in \beta$.
- $\alpha = \{\gamma \mid \gamma \text{ är ett ordinaltal och } \gamma < \alpha\}$
- För varje mängd $\mathcal{M}$ av ordinaltal är $\sup \mathcal{M} = \cup \mathcal{M} = \{x \mid x \in \alpha \text{ för något } \alpha \in \mathcal{M}\}$ ett ordinaltal, det minsta ordinaltalet som är större än eller lika med alla i $\mathcal{M}$.
- Om $\alpha \cong \beta$ (som ordnade mängder) så $\alpha = \beta$,

*K4.1.2 Bevis

- För $x, y \in \alpha$ gäller $x < y \Leftrightarrow x \subset y \Leftrightarrow x \in y$,
ty första ' $\Leftrightarrow$ ' är definitionen av ' $<$ ' i α och $x < y \Leftrightarrow x \in \alpha_y = y$.
- α är en **transitiv mängd**, dvs $y \in x$ och $x \in \alpha$ ger $y \in \alpha$,
ty $x = \alpha_x \subset \alpha$.
- Alla element i α är ordinaltal,
ty om $x \in \alpha$ är $x = \alpha_x$, en delmängd av den välordnade mängden α , således välordnad, och om $y \in x$ (så $y \in \alpha$ och $y < x$), så är
 $x_y = \{z \in x \mid z < y\} = \{z \in \alpha_x \mid z < y\} =$
 $\{z \in \alpha \mid z < x \text{ och } z < y\} = \{z \in \alpha \mid z < y\} = \alpha_y = y$.
- En icke-tom mängd av ordinaltal, $\mathcal{M}$, innehåller ett minsta element, dvs det finns ett $\alpha \in \mathcal{M}$ så att för alla $\beta \in \mathcal{M}$ gäller $\alpha < \beta$ eller $\alpha = \beta$,
bevis: Låt $x = \cap \mathcal{M} = \{\zeta \mid \zeta \in \beta \text{ för alla } \beta \in \mathcal{M}\}$. Notera att $\delta \in x \Rightarrow \delta \subseteq x$ (ty $\delta \in \beta \Rightarrow \delta \subset \beta$ för alla $\beta \in \mathcal{M}$).
Tydligen är $x \subseteq \beta$ för alla $\beta \in \mathcal{M}$. Om $x = \alpha$ för något $\alpha \in \mathcal{M}$, gäller då $\alpha \subseteq \beta$ (dvs $\alpha < \beta$ eller $\alpha = \beta$) för alla $\beta \in \mathcal{M}$, så α är minst i $\mathcal{M}$.
Vi skall visa att det inte kan gälla $x \subset \beta$ för alla $\beta \in \mathcal{M}$.
Låt $x \subset \beta$ för ett $\beta \in \mathcal{M}$ och låt γ vara det minsta elementet i β som uppfyller $\gamma \in \beta$ och $\gamma \notin x$ (detta γ finns säkert eftersom β är välordnad). Eftersom alla element i β som är mindre än γ ligger i x , gäller $\gamma = \beta_\gamma \subseteq x$.
Antag för att få motsägelse att $\gamma \subset x$. Då finns $\delta \in x$ (och således $\delta \subseteq x$) med $\delta \notin \gamma$. Men eftersom både γ och δ är element i den linjärt ordnade (under $\subset$ och därmed under $\in$) mängden β följer av $\delta \notin \gamma$ att $\delta = \gamma$ eller $\gamma \in \delta$. Men $\delta \neq \gamma$, ty $\delta \in x, \gamma \notin x$, så $\gamma \in \delta \subseteq x$, alltså $\gamma \in x$, motsägelse.
Antaganset att $\gamma \subset x$ ledde till motsägelse, så eftersom $\gamma \subseteq x$, gäller $\gamma = x$, oberoende av β .
Alltså: Om $x \subset \beta, \beta \in \mathcal{M}$ gäller $x \in \beta, x \notin x$. Om $x \subset \beta$ skulle gälla för alla $\beta \in \mathcal{M}$, skulle alltså $x \in \beta$ för alla $\beta \in \mathcal{M}$ och alltså $x \in x$, motsägelse.
- Det gäller endera av $\alpha < \beta, \alpha = \beta$ och $\beta < \alpha$,
ty detta är specialfallet $\mathcal{M} = \{\alpha, \beta\}$ av föregående.
- Varje mängd $\mathcal{M}$ av ordinaltal är välordnad,
ty detta följer direkt ur de två föregående (ax <1 och <2 är ju klara för relationen $\subset$).
- Det gäller $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha \subset \beta \Leftrightarrow \alpha \in \beta$
(Detta visste vi förut bara om α, β är element i ett ordinaltal),
ty den första ' $\Leftrightarrow$ ' är definitionen av ' $<$ ' för ordinaltal.
Den andra $\Leftarrow$ följer av att $\alpha \in \beta \Rightarrow \alpha = \beta_\alpha \subset \beta$.
Den andra $\Rightarrow$ följer ur beviset ovan om $\cap \mathcal{M}$ (i fallet $\mathcal{M} = \{\alpha, \beta\}$) :
Om $\alpha \subset \beta$ är $\alpha = \cap \mathcal{M}$, och enligt beviset $\alpha \in \beta$.
- $\alpha = \{\gamma \mid \gamma \text{ är ett ordinaltal och } \gamma < \alpha\}$
ty Dels gäller $\gamma \in \alpha \Rightarrow \gamma$ ordinaltal och $\gamma < \alpha$ och dels gäller γ ordinaltal med $\gamma < \alpha \Rightarrow \gamma \in \alpha$.

- För varje mängd $\mathcal{M}$ av ordinaltal är $\sup \mathcal{M} = \cup \mathcal{M} = \{x \mid x \in \alpha \text{ för något } \alpha \in \mathcal{M}\}$ ett ordinaltal, det minsta ordinaltalet som är större än eller lika med alla i $\mathcal{M}$,
(det behöver inte gälla att $\sup \mathcal{M} \in \mathcal{M}$, t.ex. är $\sup \omega = \cup \omega = \omega \notin \omega$)
ty kalla för att förenkla skrivandet $\cup \mathcal{M}$ för X . Enligt nästföregående är X en välordnad mängd. Låt $\beta \in X$. Då gäller $\beta \in \alpha$ för något $\alpha \in \mathcal{M}$, så $\beta = \alpha_\beta$. Låt $X_\beta = \{x \in X \mid x < \beta\}$, det gäller att $\beta = \alpha_\beta \subseteq X_\beta$, ty $\alpha \subseteq X$. Men $\gamma < \beta \Rightarrow \gamma \in \beta \Rightarrow \gamma \in \alpha_\beta$, så $X_\beta \subseteq \alpha_\beta$ och därmed $X_\beta = \alpha_\beta = \beta$ och X är ett ordinaltal, δ säg. Att $\alpha \leq \delta$ för alla $\alpha \in \mathcal{M}$ och att δ är det minsta ordinaltalet med denna egenskap är klart.
- Om $\alpha \cong \beta$ (som ordnade mängder) så $\alpha = \beta$,
ty annars skulle $\beta \subset \alpha$ (eller tvärtom) och det skulle finnas en isomorfi $\varphi : \alpha \rightarrow \beta$. Betrakta mängden $E = \{x \in \alpha \mid \varphi(x) < x\}$. E är inte tom, ty $\beta \in \alpha$ och $\varphi(\beta) \in \beta$. Låt γ vara det minsta elementet i E och $\delta = \varphi(\gamma)$. Då är $\delta < \gamma$ och eftersom φ är en isomorfi gäller $\varphi(\delta) < \varphi(\gamma) = \delta$, dvs $\delta \in E$. Detta motsäger att γ var minst i E , så $\alpha = \beta$ om de är isomorfa.
- Den enda automorfin för α är identitetsfunktionen.
(En automorfi för α är en isomorfi mellan α och α .)
ty Låt $\varphi : \alpha \rightarrow \alpha$ vara en isomorfi och låt igen $E = \{x \in \alpha \mid \varphi(x) < x\}$. Vi får som nyss att E saknar minsta element, så $E = \emptyset$. Med $F = \{x \in \alpha \mid x < \varphi(x)\} = \{x \in \alpha \mid \varphi^{-1}(x) < x\}$ fås på samma sätt (eftersom $\varphi^{-1} : \alpha \rightarrow \alpha$ också är en isomorfi) att $F = \emptyset$. Således gäller $\varphi(x) = x$ för alla $x \in \alpha$.

K4.1.3 Ordinaltalen ger alla välordningar

Följande resultat förklarar vad ordinaltal "egentligen" är för tal, de beskriver alla möjliga välordningar ("ordinal" är den engelska termen för ordningstal (som första, andra, tredje etc.)).

Sats:

Varje välordnad mängd är isomorf med ett entydigt ordinaltal.

(Med "isomorf" menas här förstås "isomorf som ordnad mängd".)

**Bevis:* Låt X vara en välordnad mängd.

Vi visar först med induktion över X att för alla $x \in X$ gäller

$$X_x \cong \xi(x) \text{ för något ordinaltal } \xi(x) \quad (*)$$

$\xi(x)$ är, om det existerar, entydigt bestämt av $x \in X$, ty $X_x \cong \alpha$, $X_x \cong \beta$ ger $\alpha \cong \beta$, så $\alpha = \beta$.

Antag för induktionen alltså att $X_x \cong \xi(x)$ för alla $x \in X_a$. Om vi visar att $X_a \cong \xi(a)$ för något ordinaltal $\xi(a)$ är påståendet $(*)$ visat.

För $x \in X_a$ låter vi $\varphi_x : X_x \rightarrow \xi(x)$ vara motsvarande isomorfi.

Om $x \in X_a$ och $y \in X_x$ gäller $\varphi_x(y) = \xi(y)$ (dvs $\varphi_x = \xi|_{X_x}$), ty isomorfin φ_x mellan X_x och $\xi(x)$ ger en isomorfi mellan motsvarande segment X_y och $\xi(x)_{\varphi_x(y)} = \varphi_x(y)$. Så $X_y \cong \varphi_x(y)$ och p.g.a. entydigheten $\varphi_x(y) = \xi(y)$.

Betrakta $A = \{\xi(x) \mid x \in X_a\}$. Om vi visar att A är ett ordinaltal ($= \xi(a)$) och att $X_a \cong A$, är induktionen klar.

A är en mängd ordinaltal, således välordnad.

Om $\beta \in A$, dvs $\beta = \xi(b)$ för ett $b \in X_a$ gäller dels $A_\beta (= \{\gamma \in A \mid \gamma < \beta\}) \subseteq \beta$

(ty β innehåller alla ordinaltal $< \beta$),
dels om $\gamma \in \beta$, eftersom $X_b \cong \beta$, att $\varphi_b^{-1}(\gamma) = c \in X_b$ och då $\gamma = \varphi_b(c) = \xi(c) \in A$, så $\gamma \in A_\beta$. Alltså $\beta \subseteq A_\beta$.
Så $\beta = A_\beta$ för alla $\beta \in A$ och A är ett ordinaltal, vilket vi kallar $\xi(a)$.
Vi visar till sist att $\xi : X_a \rightarrow A$ ger en isomorfi:
Om $c, b \in X_a$:
 $c < b \Rightarrow c \in X_b \Rightarrow \xi(c) = \varphi_b(c) \in \xi(b) \Rightarrow \xi(c) < \xi(b)$,
 $c \not< b \Rightarrow b \leq c \Rightarrow \xi(b) \leq \xi(c) \Rightarrow \xi(c) \not< \xi(b)$,
så $c < b \Leftrightarrow \xi(c) < \xi(b)$, och därför (X är linjärt ordnad) $c \neq b \Rightarrow \xi(c) \neq \xi(b)$.
Att ξ avbildar X_a **på** A följer direkt av definitionen av A .
Så $X_a \cong \xi(a) (= A)$ och beviset för $(*)$ är klart.
Låt nu $S = \{\xi(a) \mid a \in X\}$. Precis som för A och X_a nyss visas att S är ett ordinaltal och att $X \cong S$. Därmed är beviset klart.
Kommentar: Det kan vara frestande att definiera isomorfin mellan X och α med rekursion över X , enligt $\varphi(a) = \{\varphi(x) \mid x \in X_a\}$ för alla $a \in X$ (och visa att alla $\varphi(a)$ är ordinaltal, φ är en isomorfi etc.), men då finns det lite subtila problemet att vi förutsatt (se K1) att funktionen $g(a, f|_{X_a})$ tar värden i en fix mängd. Vi kommer att kunna släppa det kravet.

K4.1.4 Transfinit induktion och rekursion

Vi har sett att varje mängd av ordinaltal är välordnad. Det är dock **inte** riktigt att säga att mängden av alla ordinaltal är en välordnad mängd! Den är inte ens en mängd!!

Låt $\mathcal{O}$ ha precis alla ordinaltal som element. Då är, förbluffande nog, $\mathcal{O}$ **inte en mängd**!

Antagandet att $\mathcal{O}$ är en mängd leder till motsägelse, ty $\mathcal{O}$ vore en mängd av ordinaltal och $\sup \mathcal{O}$ skulle vara ett ordinaltal som är större eller lika med alla element i $\mathcal{O}$, dvs alla ordinaltal, men då vore dess efterföljare ett ordinaltal som vore strikt större än **alla** ordinaltal (speciellt sig själv), motsägelse!

Observera att $\mathcal{O}$ uppfyller det enda kravet vi ursprungligen ställde på en mängd, att det skulle vara klart för varje objekt om det tillhörde mängden eller inte. Detta villkor räcker alltså inte, man måste vara mer försiktig då man definierar mängder. Vi har (någonstans) förutsatt egenskaper för mängder som inte $\mathcal{O}$ har.

Om $\mathcal{O}$ inte är en mängd, vad är den då? Sådana samlingar av objekt (dvs mängder) som själva inte säkert är mängder kallas **klasser**. Klassen av alla mängder är ett annat exempel på en klass som inte är en mängd, den är liksom $\mathcal{O}$ "för stor".

Trots att $\mathcal{O}$ inte är en välordnad mängd är den tillräckligt välordnad för att tillåta induktion och rekursion. Detta kallas **transfinit induktion** och **transfinit rekursion**:

Sats (transfinit induktion):

Låt P vara en egenskap. Om det för alla $\alpha \in \mathcal{O}$ är sant att

$$\text{Om } P\beta \text{ gäller för alla } \beta < \alpha, \text{ så gäller } P\alpha,$$

så gäller $P\alpha$ för alla $\alpha \in \mathcal{O}$.

Villkoret kan med predikatlogik formuleras $\forall \beta (\beta \in \alpha \rightarrow P\beta) \rightarrow P\alpha$.

Bevis: Antag för att få motsägelse att det finns ett $\gamma \in \mathcal{O}$ så att $P\gamma$ inte gäller. Mängden $S(\gamma) = \gamma \cup \{\gamma\}$ är då välordnad (ett ordinaltal, ju) och $\{\beta \in S(\gamma) \mid P\beta \text{ falsk}\}$ är en icke-tom delmängd. Kalla dess minsta element α . Då är $P\beta$ sann för alla $\beta \in \mathcal{O}$ med $\beta < \alpha$ (dvs för alla $\beta \in \alpha$) och $P\alpha$ falsk, motsägelse.

För att beskriva transfinit rekursion inför vi begreppet en **transfinit följd**. För $\alpha \in \mathcal{O}$ är en transfinit följd av längd α detsamma som en funktion definierad på α . En transfinit följd av längd ω är speciellt en ”vanlig” oändlig följd.

Med en **operation** F avser vi här ”något” som till varje element x i en klass tillordnar ett entydigt värde $F(x)$ av något slag. Skillnaden mot en funktion är alltså bara att vi försutsätter att funktioner är definierade på (och tar värden i) mängder.

Om F är en operation definierad på $\mathcal{O}$ är speciellt $F|_\alpha$ en funktion (definierad på α).

Sats (transfinit rekursion):

Låt G vara en operation definierad på alla transfinita följder. Då finns en entydig operation definierad på $\mathcal{O}$ som uppfyller

$$F(\alpha) = G(F|_\alpha)$$

för alla $\alpha \in \mathcal{O}$.

*Bevis: Låt operationen G vara given som i satsen och $P\alpha$ vara påståendet att det finns precis en funktion f_α , definierad för $\beta \leq \alpha$ (dvs på $S(\alpha)$), så att $f_\alpha(\beta) = G(f_\alpha|_\beta)$ för alla $\beta \leq \alpha$.

Vi skall först visa att $P\alpha$ är sann för alla $\alpha \in \mathcal{O}$.

Entydigheten: Antag att $f_{1\alpha}, f_{2\alpha}$, definierade på $S(\alpha)$ båda uppfyller villkoret.

Om $f_{1\alpha}(\gamma) = f_{2\alpha}(\gamma)$ för alla $\gamma < \beta \leq \alpha$, får man (eftersom $f_{1\alpha}|_\beta = f_{2\alpha}|_\beta$) att $f_{1\alpha}(\beta) = G(f_{1\alpha}|_\beta) = G(f_{2\alpha}|_\beta) = f_{2\alpha}(\beta)$, så med induktion över $S(\alpha)$ att $f_{1\alpha}(\beta) = f_{2\alpha}(\beta)$ för alla $\beta \leq \alpha$, dvs f_α är unik om den finns. Det följer att om både f_β och f_α som ovan finns och $\beta < \alpha$, så är $f_\beta(\gamma) = f_\alpha(\gamma)$ för alla $\gamma \leq \beta$. $f_\alpha|_{S(\beta)}$ uppfyller ju villkoren som entydigt definierar f_β .

Antag nu att $P\beta$ är sann för alla $\beta < \alpha$. Om vi därur visar att $P\alpha$ är sann, följer det med transfinit induktion att $P\alpha$ verkligen är sann för alla $\alpha \in \mathcal{O}$.

Definiera f_α så: $f_\alpha|_\alpha$ ges av $f_\alpha(\beta) = f_\beta(\beta)$ då $\beta < \alpha$ och sedan $f_\alpha(\alpha) = G(f_\alpha|_\alpha)$. $f_\alpha(\beta) = G(f_\alpha|_\beta)$ är då uppfyllt för $\beta < \alpha$ eftersom $f_\alpha(\beta) = f_\beta(\beta) = G(f_\beta|_\beta) = G(f_\alpha|_\beta)$ och för $\beta = \alpha$ p.g.a. definitionen av $f_\alpha(\alpha)$. Det är klart, $P\alpha$ är sann för alla $\alpha \in \mathcal{O}$.

Definiera nu operationen F för $\alpha \in \mathcal{O}$ enligt $F(\alpha) = f_\alpha(\alpha)$. Om $\beta < \alpha$ gäller då $F(\beta) = f_\beta(\beta) = f_\alpha(\beta)$, dvs $F|_\alpha = f_\alpha|_\alpha$. Så $F(\alpha) = f_\alpha(\alpha) = G(f_\alpha|_\alpha) = G(F|_\alpha)$. Att det bara finns en sådan operation F följer som för f_α i beviset.

I nästa avsnitt skall vi använda transfinit rekursion för att definiera summer, produkter och potenser av ordinaltal.

K4.1.5 Aritmetik för ordinaltal

För att formulera rekursion över $\mathcal{O}$, dvs beskriva operationen G , är det ofta praktiskt att skilja mellan tre typer av ordinaltal:

1. Talet **0**.
2. **Efterföljare**, dvs α så att det finns β med $\alpha = S(\beta)$. Exempel är alla

nollskilda naturliga tal, $\omega + 1 = S(\omega)$, $\omega^2 + \omega + 5 = S(\omega^2 + \omega + 4)$.

3. **Gränsordinaltal**, dvs resten. Man ser att α är ett gränsordinaltal precis om $\alpha \neq 0$ och $\alpha = \sup \alpha (= \sup \{\beta \mid \beta \in \alpha\} = \cup \alpha)$. Exempel är $\omega, \omega \cdot 2, \omega^\omega$.

Varje ordinaltal är tydligen av precis en av typerna 1,2,3.

Vi definierar nu aritmetiska operationer på $\mathcal{O}$ rekursivt. Definitionerna är förstas valda så att operationerna för ändliga ordinaltal (dvs naturliga tal) sammanfaller med de vanliga (för addition och multiplikation innebär det att vi återfinner några av Peanos axiom i definitionerna av rekursionen). Som vi skall se gäller dock inte alla vanliga räkneregler för oändliga ordinaltal.

Addition av ordinaltal:

För alla $\alpha \in \mathcal{O}$:

$$\begin{aligned} \alpha + 0 &= \alpha \\ \alpha + \beta &= S(\alpha + \gamma), & \beta &= S(\gamma) \\ \alpha + \beta &= \sup \{\alpha + \gamma \mid \gamma \in \beta\}, & \beta &\text{ ett gränsordinaltal} \end{aligned}$$

Ex. $\alpha + 1 = \alpha + S(0) = S(\alpha + 0) = S(\alpha)$ (skönt).

$1 + \omega = \sup \{1 + n \mid n \in \omega\} = \omega \neq \omega + 1$, så addition är **inte kommutativ** på $\mathcal{O}$.

För alla $\alpha, \beta \in \mathcal{O}$ gäller,

$$\alpha + \beta = \alpha \cup \{\alpha + \gamma \mid \gamma \in \beta\}.$$

Detta uttryck kan tas som en alternativ rekursiv definition av addition i $\mathcal{O}$.

Bevis: Låt $f(\alpha, \beta) = \alpha \cup \{\alpha + \gamma \mid \gamma \in \beta\}$.

Vi skall visa att $\alpha + \beta = f(\alpha, \beta)$ för alla $\alpha, \beta \in \mathcal{O}$.

Antag att $\alpha + \gamma = f(\alpha, \gamma)$ för alla $\gamma \in \beta$.

För $\beta = 0$ får man $\alpha + 0 = \alpha = \alpha \cup \emptyset = \alpha \cup \{\alpha + \gamma \mid \gamma \in 0\} = f(\alpha, 0)$,

för $\beta = S(\delta)$ fås (eftersom $\delta \in \beta$) $\alpha + \beta = S(\alpha + \delta) = (\alpha + \delta) \cup \{\alpha + \delta\} = \alpha \cup \{\alpha + \gamma \mid \gamma \in \delta\} \cup \{\alpha + \delta\} = \alpha \cup \{\alpha + \gamma \mid \gamma \in \delta \cup \{\delta\}\} = f(\alpha, S(\delta)) = f(\alpha, \beta)$ och

för β ett gränsordinaltal fås (eftersom $\cup \beta = \beta$) $\alpha + \beta = \sup \{\alpha + \gamma \mid \gamma \in \beta\} = \bigcup_{\gamma \in \beta} (\alpha + \gamma) = \bigcup_{\gamma \in \beta} (\alpha \cup \{\alpha + \delta \mid \delta \in \gamma\}) = \alpha \cup \bigcup_{\gamma \in \beta} \{\alpha + \delta \mid \delta \in \gamma\} = \alpha \cup \{\alpha + \delta \mid \delta \in \bigcup_{\gamma \in \beta} \gamma\} = \alpha \cup \{\alpha + \delta \mid \delta \in \cup \beta\} = \alpha \cup \{\alpha + \delta \mid \delta \in \beta\} = f(\alpha, \beta)$.

Med transfinit induktion över β fås påståendet.

Detta ger $0 + \beta = \beta$ (vilket förstås **inte** är självklart),

ty antag att $0 + \gamma = \gamma$ för alla $\gamma \in \beta$.

Då fås $0 + \beta = 0 \cup \{0 + \gamma \mid \gamma \in \beta\} = \emptyset \cup \{\gamma \mid \gamma \in \beta\} = \beta$. Påståendet följer med induktion.

Vidare fås $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$, dvs addition är **associativ** i $\mathcal{O}$,

ty Antag för induktion att $\alpha + (\beta + \zeta) = (\alpha + \beta) + \zeta$ för alla $\zeta \in \gamma$.

Då fås $\alpha + (\beta + \gamma) = \alpha \cup \{\alpha + \delta \mid \delta \in (\beta + \gamma)\} = \alpha \cup \{\alpha + \delta \mid \delta \in \beta \cup \{\beta + \zeta \mid \zeta \in \gamma\}\} = \alpha \cup \{\alpha + \delta \mid \delta \in \beta\} \cup \{\alpha + (\beta + \zeta) \mid \zeta \in \gamma\} = (\alpha + \beta) \cup \{(\alpha + \beta) + \zeta \mid \zeta \in \gamma\} = (\alpha + \beta) + \gamma$. Påståendet följer med induktion.

Och vidare

$$\bullet \alpha + \beta_1 < \alpha + \beta_2 \Leftrightarrow \beta_1 < \beta_2,$$

ty Om $\beta_1 < \beta_2$ gäller $\beta_1 \in \beta_2$, så $\alpha + \beta_1 \in \alpha + \beta_2$, dvs $\alpha + \beta_1 < \alpha + \beta_2$.
Om å andra sidan $\beta_1 \not< \beta_2$ gäller $\beta_2 < \beta_1$ eller $\beta_1 = \beta_2$, så $\alpha + \beta_2 < \alpha + \beta_1$ eller $\alpha + \beta_1 = \alpha + \beta_2$, så $\alpha + \beta_1 \not< \alpha + \beta_2$.

- $\alpha + \beta_1 = \alpha + \beta_2 \Leftrightarrow \beta_1 = \beta_2$,
ty om $\beta_1 \neq \beta_2$ gäller $\beta_1 \geq \beta_2$, så $\alpha + \beta_1 \geq \alpha + \beta_2$, dvs $\alpha + \beta_1 \neq \alpha + \beta_2$,
om $\beta_1 = \beta_2$ gäller förstås $\alpha + \beta_1 = \alpha + \beta_2$.
- $\alpha_1 < \alpha_2 \Rightarrow \alpha_1 + \beta \leq \alpha_2 + \beta$,
ty Låt $\alpha_1 < \alpha_2$ och antag att $\alpha_1 + \gamma \leq \alpha_2 + \gamma$ för alla $\gamma \in \beta$.
Då fås $\alpha_1 \subset \alpha_2$. Vidare för alla $\gamma \in \beta$, $\alpha_1 + \gamma \leq \alpha_2 + \gamma \in \alpha_2 + \beta$, så $\alpha_1 + \gamma \in \alpha_2 + \beta$. Således $\alpha_1 + \beta = \alpha_1 \cup \{\alpha_1 + \gamma \mid \gamma \in \beta\} \subseteq \alpha_2 + \beta$.
Induktion.

Det är inte heller svårt att se att additionen i $\mathcal{O}$ överensstämmer med $+$ mellan ordnade mängder som definierades i materialet K1.

Multiplikation av ordinaltal:

För alla $\alpha \in \mathcal{O}$: $\alpha \cdot 0 = 0$
 $\alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \gamma + \alpha$, $\beta = S(\gamma)$
 $\alpha \cdot \beta = \sup\{\alpha \cdot \gamma \mid \gamma \in \beta\}$, β ett gränsordinaltal

Ex. $\alpha \cdot 1 = \alpha \cdot S(0) = \alpha \cdot 0 + \alpha = 0 + \alpha = \alpha$, som väntat.
 $2 \cdot \omega = \sup\{2 \cdot n \mid n \in \omega\} = \omega \neq \omega \cdot 2 = \omega \cdot S(1) = \omega \cdot 1 + \omega = \omega + \omega$, så multiplikation är, som addition, **inte kommutativ** på $\mathcal{O}$.

För alla $\alpha, \beta \in \mathcal{O}$ gäller,

$$\alpha \cdot \beta = \{\alpha \cdot \delta + \gamma \mid \gamma \in \alpha, \delta \in \beta\}.$$

Detta uttryck kan tas som en alternativ rekursiv definition av multiplikation i $\mathcal{O}$.

Bevis: Låt $g(\alpha, \beta) = \{\alpha \cdot \delta + \gamma \mid \gamma \in \alpha, \delta \in \beta\}$.
Vi skall visa att $\alpha \cdot \beta = g(\alpha, \beta)$ för alla $\alpha, \beta \in \mathcal{O}$.
Antag att $\alpha \cdot \delta = g(\alpha, \delta)$ för alla $\delta \in \beta$.
För $\beta = 0$ får man $\alpha \cdot 0 = 0 = \emptyset = \{\alpha \cdot \delta + \gamma \mid \gamma \in \alpha, \delta \in \emptyset\} = g(\alpha, 0)$,
för $\beta = S(\zeta)$ fås (eftersom $\zeta \in \beta$) $\alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \zeta + \alpha = (\alpha \cdot \zeta) \cup \{\alpha \cdot \zeta + \gamma \mid \gamma \in \alpha\} = \{\alpha \cdot \eta + \gamma \mid \gamma \in \alpha, \eta \in \zeta\} \cup \{\alpha \cdot \zeta + \gamma \mid \gamma \in \alpha\} = \{\alpha \cdot \eta + \gamma \mid \gamma \in \alpha, \eta \in \zeta \cup \{\zeta\}\} = \{\alpha \cdot \eta + \gamma \mid \gamma \in \alpha, \eta \in \beta\} = g(\alpha, \beta)$ och
för β ett gränsordinaltal fås (eftersom $\cup\beta = \beta$) $\alpha \cdot \beta = \sup\{\alpha \cdot \delta \mid \delta \in \beta\} = \bigcup_{\delta \in \beta} (\alpha \cdot \delta) = \bigcup_{\delta \in \beta} \{\alpha \cdot \zeta + \gamma \mid \gamma \in \alpha, \zeta \in \delta\} = \{\alpha \cdot \zeta + \gamma \mid \gamma \in \alpha, \zeta \in \cup\beta\} = \{\alpha \cdot \zeta + \gamma \mid \gamma \in \alpha, \zeta \in \beta\} = g(\alpha, \beta)$.
Med transfinit induktion över β fås påståendet.

Potenser av ordinaltal:

För alla $\alpha \in \mathcal{O}$: $\alpha^0 = 1$
 $\alpha^\beta = \alpha^\gamma \cdot \alpha$, $\beta = S(\gamma)$
 $\alpha^\beta = \sup\{\alpha^\gamma \mid \gamma \in \beta\}$, β ett gränsordinaltal

Fortsättning följer...