Lösningar till uppgifter i kapitel 8. Dessutom några kommentarer.

Stort tack till Hillevi Gavel. Hon var tidigare assistent i kursen och hjälpte till att skriva en del av dessa lösningar.

8.1.I.1

$\exists x S(x, e)$. Är sant. Tag $x = \alpha$.

8.1.I.4

$\forall x(F(x) \leftrightarrow R(x, x))$. Är inte sant. Stämmer inte för $x = \delta$. $F(\delta)$ är inte sant, men $R(\delta, \delta)$ är sant.

8.1.II.5

$\forall x(\sim\exists y R(y, x) \rightarrow \sim F(x))$. Är inte sant. Med $x = \alpha$ fås $\sim\exists y R(y, x)$ falskt. (Tag $y = \beta$.) Samtidigt är $\sim F(\alpha)$ falskt.

8.1.III.1

$\forall x \forall y \exists z S(x, y, z)$. Är inte sant. Tag $x = 10$, $y = 10$. Då är $10 + 10 = 20$. Men 20 finns inte med i D.

8.1.IV.1

$\exists x \forall y(x < y)$. Är inte sant. Tag vilket x som helst. Det finns alltid ett tal y som inte uppfyller $x < y$. (Om $x = 0$ tar vi $y = 0$.)

8.2.I.1

$\exists x R(a, x),\ \exists x R(b, x) \not\models \exists x(R(a, x) \vee R(b, x))$
$U = \{\alpha, \beta\}$, $Ext(R) = \{<\alpha, \alpha>, <\beta, \beta>\}$, $Ref(a) = \alpha$, $Ref(b) = \beta$.

8.2.I.1

$\exists x \exists y(x \neq y) \not\models a \neq b$.
$U = \{\alpha, \beta\}$, $Ref(a) = Ref(b) = \alpha$.

8.4.I

Visa med naturlig deduktion:

8.4.I.1

$\vdash_{NK} \forall x \forall y(F(x) \,\&\, \sim F(y) \rightarrow x \neq y)$

Skiss Ska visa: Om x har egenskap F och y inte har det så kan x och y inte vara samma element. Verkar vettigt. Om de vore samma skulle de ju ha samma egenskaper. Med andra ord: Antag motsatsen!

Uttrycket är ett för-alla-uttryck, så vi försöker visa det för två godtyckliga element a och b. Den inre satsen är en implikation, så vi startar med att anta försatsen. Eftersatsen bevisar vi sedan genom att anta motsatsen.

1	(1)	$F(a) \,\&\, {\sim}F(b)$	*Antagande*
2	(2)	$a = b$	*Antagande*
1	(3)	$F(a)$	1 &E
1,2	(4)	$F(b)$	2,3 =E
1	(5)	${\sim}F(b)$	1 &E
1,2	(6)	$\curlywedge$	4,5 ∼E
1	(7)	${\sim}(a = b)$	2,6 ∼I
	(8)	$F(a) \,\&\, {\sim}F(b) \rightarrow {\sim}(a = b)$	1,7 →I
	(9)	$\forall y(F(a) \,\&\, {\sim}F(y) \rightarrow {\sim}(a = y)$	8 ∀I
	(10)	$\forall x \forall y(F(x) \,\&\, {\sim}F(y) \rightarrow {\sim}(x = y)$	9 ∀I

8.4.I.2

$\forall x(F(x) \rightarrow \exists y(G(y) \,\&\, (x = y))) \dashv\vdash \forall x(F(x) \rightarrow G(x))$

1	(1)	$\forall x(F(x) \rightarrow \exists y(G(y) \,\&\, (x = y)))$	*Premiss*
2	(2)	$F(a)$	*Antagande*
1	(3)	$F(a) \rightarrow \exists y(G(y) \,\&\, (a = y))$	1 ∀E
1,2	(4)	$\exists y(G(y) \,\&\, (a = y))$	2,3 →E
5	(5)	$G(b) \,\&\, (a = b)$	*Antagande*
5	(6)	$G(b)$	5 &E
5	(7)	$a = b$	5 &E
5	(8)	$G(a)$	6,7 =E
1,2	(9)	$G(a)$	4,5,8 ∃E
1	(10)	$F(a) \rightarrow G(a)$	2,9 →I
1	(11)	$\forall x(F(x) \rightarrow G(x))$	10 ∀I

1	(1)	$\forall x(F(x) \rightarrow G(x))$	*Premiss*
2	(2)	$F(a)$	*Antagande*
1	(3)	$F(a) \rightarrow G(a)$	1 ∀E
1,2	(4)	$G(a)$	2,3 →E
	(5)	$a = a$	=I
1,2	(6)	$G(a) \,\&\, (a = a)$	4,5 &I
1,2	(7)	$\exists y(G(y) \,\&\, (a = y)$	6 ∃I
1	(8)	$F(a) \rightarrow \exists y(G(y) \,\&\, (a = y))$	2,7 →I
1	(9)	$\forall x(F(x) \rightarrow \exists y(G(y) \,\&\, (x = y)))$	8 ∀I

8.4.I.5

$\forall y(R(a, y) \rightarrow y = b) \vdash_{NK} \exists y(R(a, y) \,\&\, G(y)) \rightarrow G(b)$

Skiss Utgångspunkt: Allt som är R med a är lika med b (dvs b är det enda som är R med a). Ska visa: Om det finns något som både är R med a och dessutom har egenskap G så måste b ha egenskap G.

Tja, det diskuterade elementet x (kalla det c) måste enligt premissen vara identiskt med b, som då också har egenskap G, eftersom c har den.

Det vi ska visa är en implikation, så vi startar med att anta försatsen.

1	(1)	$\forall y(R(a,y) \rightarrow y = b)$	*Premiss*
2	(2)	$\exists y(R(a,y)\ \&\ G(y))$	*Antagande*
3	(3)	$R(a,c)\ \&\ G(c)$	*Antagande*
1	(4)	$R(a,c) \rightarrow c = b$	1 $\forall$E
3	(5)	$R(a,c)$	3 &E
1, 3	(6)	$c = b$	4,5 $\rightarrow$E
3	(7)	$G(c)$	3 &E
1, 3	(8)	$G(b)$	6,7 =E
1, 2	(9)	$G(b)$	2,3,8 $\exists$E
1	(10)	$\exists y(R(a,y)\ \&\ G(y)) \rightarrow G(b)$	2,9 $\rightarrow$I

8.2.I.6

$\forall x(R(x,a) \rightarrow x = c),\ \forall x(R(x,b) \rightarrow x = d),\ \exists x(R(x,a)\ \&\ R(x,b)) \vdash c = d$

1	(1)	$\forall x(R(x,a) \rightarrow x = c)$	*Premiss*
2	(2)	$\forall x(R(x,b) \rightarrow x = d)$	*Premiss*
3	(3)	$\exists x(R(x,a)\ \&\ R(x,b))$	*Premiss*
4	(4)	$R(e,a)\ \&\ R(e,b)$	*Antagande*
4	(5)	$R(e,a)$	4 &E
1	(6)	$R(e,a) \rightarrow e = c$	1 $\forall$E
1, 4	(7)	$e = c$	5,6 $\rightarrow$E
4	(8)	$R(e,b)$	4 &E
2, 4	(9)	$R(e,b) \rightarrow e = d$	2 $\forall$E
2, 4	(10)	$e = d$	8,9 $\rightarrow$E
1, 2, 4	(11)	$c = d$	7,10 =E
1, 2, 3	(12)	$c = d$	3,4,11 $\exists$E

8.4.I.9

$\exists x \forall y(x = y \leftrightarrow F(y)),\ \forall x(G(x) \rightarrow F(x)) \vdash_{NK} \forall x \forall y(G(x)\ \&\ G(y) \rightarrow x = y)$

Skiss Första premissen säger i klartext: "det finns exakt ett element med egenskap F". Vi kan kalla detta element c. Premiss två säger att allt som har egenskap G också har egenskap F. Och vi ska visa att om två godtyckliga element båda har egenskap G så måste de vara lika.

Ja, har de egenskap G så har de enligt premiss två också egenskap F och då måste de båda enligt premiss ett vara lika med c, och därmed lika med varandra.

Vi ska visa ett för-alla-uttryck, och satsar därför på att visa det för ett par godtyckliga element,

a och b. Detta är en implikation, så vi börjar med att anta församsatsen.

1	(1)	$\exists x \forall y(x = y \leftrightarrow F(y))$	*Premiss*	
2	(2)	$\forall x(G(x) \rightarrow F(x))$	*Premiss*	
3	(3)	$G(a) \,\&\, G(b)$	*Antagande*	
4	(4)	$\forall y(c = y \leftrightarrow F(y))$	*Antagande*	Döp x i (1) till c
2	(5)	$G(a) \rightarrow F(a)$	2 $\forall$E	
3	(6)	$G(a)$	3 &E	
$2,3$	(7)	$F(a)$	5,6 $\rightarrow$E	
4	(8)	$c = a \leftrightarrow F(a)$	4 $\forall$E	
4	(9)	$(c = a \rightarrow F(a)) \,\&\, (F(a) \rightarrow c = a)$	8 Df	
4	(10)	$F(a) \rightarrow c = a$	9 &E	
$2,3,4$	(11)	$c = a$	7,10 $\rightarrow$E	
2	(12)	$G(b) \rightarrow F(a)$	2 $\forall$E	
3	(13)	$G(b)$	3 &E	
$2,3$	(14)	$F(b)$	12,13 $\rightarrow$E	
4	(15)	$c = b \leftrightarrow F(b)$	4 $\forall$E	
4	(16)	$(c = b \rightarrow F(b)) \,\&\, (F(b) \rightarrow c = b)$	15 Df	
4	(17)	$F(b) \rightarrow c = b$	16 &E	
$2,3,4$	(18)	$c = b$	14,17 $\rightarrow$E	
$2,3,4$	(19)	$a = b$	11,18 =E	
$1,2,3$	(20)	$a = b$	1,4,19 $\exists$E	Namnet oväsentligt
$1,2$	(21)	$G(a) \,\&\, G(b) \rightarrow a = b$	3,20 $\rightarrow$I	
$1,2$	(22)	$\forall y(G(a) \,\&\, G(y) \rightarrow a = y)$	21 $\forall$I	
$1,2$	(23)	$\forall x \forall y(G(x) \,\&\, G(y) \rightarrow x = y)$	22 $\forall$I	

8.4.II

Översätt till symboler och bevisa:

8.4.II.(2)

Olika kvinnor kan inte föda samma person. Olika kvinnor födde John och James. Så Bill kan inte vara både John och James.

Införd notation Universum=mänskligheten. $F(x)$ betyder "x är kvinna (feminin). $B(x,y)$ betyder "x födde y".a=John, b=James, c=Bill.

$\sim\exists x\exists y\exists z(((F(x)\,\&\,F(y))\,\&\,x\neq y)\,\&\,(B(x,z)\,\&\,B(y,z)))$
$\exists x\exists y(((F(x)\,\&\,F(y))\,\&\,x\neq y)\,\&\,(B(x,a)\,\&\,B(y,b)))$
$\therefore\ \sim(c=a\,\&\,c=b)$

Skiss Antag att Bill är både John och James. Då är de samma individ. Båda är födda, av olika kvinnor (säg d och e). Men då finns det ju två olika kvinnor som fött samma person,vilket är en motsägelse!

(1)	$\sim\exists x\exists y\exists z\big(([F(x)\,\&\,F(y)]\,\&\,x\neq y)\,\&\,[B(x,z)\,\&\,B(y,z)]\big)$	*Premiss*
(2)	$\exists x\exists y\big(([F(x)\,\&\,F(y)]\,\&\,x\neq y)\,\&\,[B(x,a)\,\&\,B(y,b)]\big)$	*Premiss*
(3)	$c=a\,\&\,c=b$	*Antagande*
(4)	$\exists y\big(([F(d)\,\&\,F(y)]\,\&\,d\neq y)\,\&\,[B(d,a)\,\&\,B(y,b)]\big)$	*Antagande*
(5)	$([F(d)\,\&\,F(e)]\,\&\,d\neq e)\,\&\,[B(d,a)\,\&\,B(e,b)]$	*Antagande*
(6)	$B(d,a)\,\&\,B(e,b)$	5 &E
(7)	$[F(d)\,\&\,F(e)]\,\&\,d\neq e$	5 &E
(8)	$c=a$	3 &E
(9)	$B(d,a)$	6 &E
(10)	$B(d,c)$	8,9 =E
(11)	$c=b$	3 &E
(12)	$B(e,b)$	6 &E
(13)	$B(e,c)$	11,12 =E
(14)	$B(d,c)\,\&\,B(e,c)$	10,13 &I
(15)	$([F(d)\,\&\,F(e)]\,\&\,d\neq e)\,\&\,[B(d,c)\,\&\,B(e,c)]$	7,14 &I
(16)	$\exists z\big(([F(d)\,\&\,F(e)]\,\&\,d\neq e)\,\&\,[B(d,z)\,\&\,B(e,z)]\big)$	15 ∃I
(17)	$\exists y\exists z\big(((F(d)\,\&\,F(y))\,\&\,d\neq y)\,\&\,(B(d,z)\,\&\,B(y,z))\big)$	16 ∃I
(18)	$\exists x\exists y\exists z\big(((F(x)\,\&\,F(y))\,\&\,x\neq y)\,\&\,(B(x,z)\,\&\,B(y,z))\big)$	17 ∃I
(19)	$\curlywedge$	1,18 ∼E
(20)	$\curlywedge$	4,5,19 ∃E
(21)	$\curlywedge$	3,4,20 ∃E
(22)	$\sim(c=a\,\&\,c=b)$	21 ∼I

(Beroendeanalysen får tyvärr inte plats.)

Anm. På rad 4 och 5 antar vi att mammorna heter d och e, vilket är nödvändigt för att vi ska kunna plocka isär den långa konjunktionen i dess beståndsdelar. Notera också att vi får jobba steg för steg då vi vill ha loss en inre bit av konjunktionen (vi kan inte ta loss $B(d,a)$ direkt, utan måste gå via rad 6). Vi får också jobba steg för steg då vi lägger på existenskvantifikatorerna på rad 16–18. Slutligen, på rad 19 och 20 noterar vi att de valda namnen på mammorna egentligen inte spelade någon roll.

8.4.III

Visa att *Axiomet om utvidgbarhet* i mängdläran leder till (1) att olika mängder har olika element och (2) att det finns högst en mängd utan några element.

$E : \forall x \forall y (S(x) \,\&\, S(y) \to (x = y \leftrightarrow \forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y)))$

8.4.III.(1)

$E \vdash_{NK} \forall x \forall y ((S(x) \,\&\, S(y)) \,\&\, x \neq y \to \exists z ((z \in x \,\&\, z \notin y) \vee (z \in y \,\&\, z \notin x)))$

Notation För att förenkla inför vi ett predikat för "element i" och skriver $M(x,y)$ istället för $x \in y$ ("M" som i "member"). Vidare är det lättare att genomföra beviset om man skriver $\sim(a = b)$ istället för $a \neq b$.

Skiss Antag att a och b är olika mängder. Anta vidare att det inte finns något element som ligger i den ena men inte i den andra. Studera ett godtyckligt element c. c måste då ligga i båda mängderna, eller ingen. Men det betyder per definition att a och b är samma mängd, vilket är en motsägelse!

Översatt till naturlig deduktion, med alla pinsamma detaljer insatta, tar detta kortfattade resonemang tyvärr ganska stor plats ...

(1)	$\forall x \forall y (S(x) \,\&\, S(y) \to (x = y \leftrightarrow \forall z (M(z,x) \leftrightarrow M(z,y))))$	*Premiss*
(2)	$(S(a) \,\&\, S(a)) \,\&\, \sim(a = b)$	*Antagande*
(3)	$\sim\exists z ((M(z,a) \,\&\, \sim M(z,b)) \vee (M(z,b) \,\&\, \sim M(z,a)))$	*Antagande*
(4)	$M(c,a)$	*Antagande*
(5)	$\sim M(c,b)$	*Antagande*
(6)	$M(c,a) \,\&\, \sim M(c,b)$	4,5 &I
(7)	$(M(c,a) \,\&\, \sim M(c,b)) \vee (M(c,b) \,\&\, \sim M(c,a))$	6 ∨I
(8)	$\exists z ((M(z,a) \,\&\, \sim M(z,b)) \vee (M(z,b) \,\&\, \sim M(z,a)))$	7 ∃I
(9)	$\curlywedge$	3,8 ∼E
(10)	$\sim\sim M(c,b)$	5,9 ∼I
(11)	$M(c,b)$	10 DN
(12)	$M(c,a) \to M(c,b)$	4,11 →I
(13)	$M(c,b)$	*Antagande*
(14)	$\sim M(c,a)$	*Antagande*
(15)	$M(c,b) \,\&\, \sim M(c,a)$	13,14 &I
(16)	$(M(c,a) \,\&\, \sim M(c,b)) \vee (M(c,b) \,\&\, \sim M(c,a))$	15 ∨I
(17)	$\exists z ((M(z,a) \,\&\, \sim M(z,b)) \vee (M(z,b) \,\&\, \sim M(z,a)))$	16 ∃I
(18)	$\curlywedge$	3,17 ∼E
(19)	$\sim\sim M(c,a)$	14,18 ∼I
(20)	$M(c,a)$	19 DN
(21)	$M(c,b) \to M(c,a)$	13,20 →I
(22)	$(M(c,a) \to M(c,b)) \,\&\, (M(c,b) \to M(c,a))$	12,21 &I
(23)	$M(c,a) \leftrightarrow M(c,b)$	22 Df
(24)	$\forall z (M(z,a) \leftrightarrow M(z,b))$	23 ∀I
(25)	$\forall y (S(a) \,\&\, S(y) \to (a = y \leftrightarrow \forall z (M(z,a) \leftrightarrow M(z,y))))$	1 ∀E
(26)	$S(a) \,\&\, S(b) \to (a = b \leftrightarrow \forall z (M(z,a) \leftrightarrow M(z,b)))$	25 ∀E
(27)	$S(a) \,\&\, S(b)$	2 &I
(28)	$a = b \leftrightarrow \forall z (M(z,a) \leftrightarrow M(z,b))$	26,27 →E
(29)	$(a = b \to \forall z (M(z,a) \leftrightarrow M(z,b))) \,\&\, (\forall z (M(z,a) \leftrightarrow M(z,b)) \to a = b)$	28 Df
(30)	$\forall z (M(z,a) \leftrightarrow M(z,b)) \to a = b$	29 &E
(31)	$a = b$	24,30 →E
(32)	$\sim(a = b)$	2 &E
(33)	$\curlywedge$	31,32 ∼E
(34)	$\sim\sim\exists z ((M(z,a) \,\&\, \sim M(z,b)) \vee (M(z,b) \,\&\, \sim M(z,a)))$	3,33 ∼I
(35)	$\exists z ((M(z,a) \,\&\, \sim M(z,b)) \vee (M(z,b) \,\&\, \sim M(z,a)))$	34 DN
(36)	$(S(a) \,\&\, S(a)) \,\&\, \sim(a = b) \to \exists z ((M(z,a) \,\&\, \sim M(z,b)) \vee (M(z,b) \,\&\, \sim M(z,a)))$	2,35 →I

8.5 Relationer

Ordbok för relationer (i slaskig notation). Jag tar bara med de definitioner som krävs för de angivna uppgifterna.

reflexiv: $x \sim x \; \forall x$, allt är relaterat till sig självt (ex: $\geq$).

irreflexiv: Inget är relaterat till sig självt (ex: $>$).

icke-reflexiv: En del, men inte allt, är relaterat till sig självt (ex: *kär i*).

symmetrisk: $x \sim y \Rightarrow y \sim x$,relationen är ömsesidig (ex: $\neq$)

asymmetrisk: Relationen är aldrig ömsesidig (ex: $<$)

icke-symmetrisk: Relationen är ömsesidig ibland, men inte alltid (ex: *bror till*).

antisymmetrisk: Om relationen är ömsesidig så måste det bero på att de två elementen var identiska (ex: *delmängd i*).

transitiv: $x \sim y,\ y \sim z \Rightarrow x \sim z$, man kan vara relaterad via något annat (ex: *parallell med*).

intransitiv Man kan inte vara relaterad via något annat (ex: *far till*).

icke transitiv En del, men inte alla, är relaterade via något annat (ex: *vinkelrät mot*, i 3-d).

euklidisk: $x \sim y,\ x \sim z \Rightarrow y \sim z$, två som är realterade till samma sak är relaterade till varandra.

seriell: $\forall x \exists y \; x \sim y$, allt är relaterat till något.

8.5.I

Klassificera nedanstående relationer:

(1) *Är barn till*

- Ingen är barn till sig själv, så relationen är irreflexiv.
- Om a är barn till b så kan inte b vara barn till a. asymmetrisk.
- Barnbarn är inte samma sak som barn, så relationen är inte intransitiv.
- Om både y och z är barn till x brukar y mycket sällan vara barn till z (se dock Oidipus-legenden). Inte euklidisk.
- Alla är barn till någon. Alltså seriell.

(2) *Är syster till*

- Brukar definieras som att man inte är sin egen syster. Irreflexiv
- Om x är syster till y så kan y vara bror eller syster till x. Icke-symmetrisk.
- Helsysterskap är transitivt, halvsysterskap är icke-transitivt.
- om x är syster till både y och z kan ju både y och z vara manliga, och då är y inte syster till z. Ej Euklidiskt.
- Alla är inte systrar till någon (t ex enda-barn). Ej seriell.

8.5.II.(1)

Visa: R är antisymmetrisk $\nvDash$ R är inte symmetrisk

Motexempel: Relationen "=" är både symmetrisk och antisymmetrisk.

8.5.II.(4)

Visa: R är seriell, R är Euklidisk $\nvDash$ R är transitiv

Motexempel: Ett sätt att komma runt den ganska krångliga definitionen på Euklidisk är att se till att det inte finns nånting som uppfyller församsen i implikationen, dvs att se till att det inte finns något par par med samma förstaelement. Kravet på seriell ger sedan att varje element ska vara förstelement i något par. Om vi kopplar ihop alla elementen i en ring, där alla är relaterade till den till höger, och inte till någon annan, så uppfyller vi både seriell och euklidisk, men inte transitiv.

8.5.III.(1)

Visa : R reflexiv, R Euklidisk $\vdash_{NK}$ R är en ekvivalensrelation.

Skiss En ekvivalensrelation är reflexiv, symmetrisk och transitiv. Transitiv verkar lätt att visa med hjälp av symmetrisk och euklidisk, så vi startar med att visa symmetrisk.

1	(1)	$\forall x R(x,x)$	*Premiss*	reflexiv
2	(2)	$\forall x \forall y \forall z (R(x,y) \,\&\, R(x,z) \to R(y,z))$	*Premiss*	euklidisk
3	(3)	$R(a,b)$	*Antagande*	
1	(4)	$R(a,a)$	1 $\forall$E	
1, 3	(5)	$R(a,b) \,\&\, R(a,a)$	3,4 &I	
2	(6)	$\forall y \forall z (R(a,y) \,\&\, R(a,z) \to R(y,z))$	2 $\forall$E	
2	(7)	$\forall z (R(a,b) \,\&\, R(a,z) \to R(b,z))$	6 $\forall$E	
2	(8)	$R(a,b) \,\&\, R(a,a) \to R(b,a)$	7 $\forall$E	
1, 2, 3	(9)	$R(b,a)$	5,8 $\to$E	
1, 2	(10)	$R(a,b) \to R(b,a)$	3,9 $\to$I	
1, 2	(11)	$\forall y (R(a,y) \to R(y,a))$	10 $\forall$I	
1, 2	(12)	$\forall x \forall y (R(x,y) \to R(y,x))$	11 $\forall$I	symmetrisk
13	(13)	$R(a,b) \,\&\, R(b,c)$	*Antagande*	
13	(14)	$R(a,b)$	13 &E	
1, 2, 13	(15)	$R(b,a)$	10,14 $\to$E	
13	(16)	$R(b,c)$	13 &E	
1, 2, 13	(17)	$R(b,a) \,\&\, R(b,c)$	15,16 &I	
2	(18)	$\forall y \forall z (R(b,y) \,\&\, R(b,z) \to R(y,z))$	2 $\forall$E	
2	(19)	$\forall z (R(b,a) \,\&\, R(b,z) \to R(a,z))$	18 $\forall$E	
2	(20)	$R(b,a) \,\&\, R(b,c) \to R(a,c)$	19 $\forall$E	
1, 2, 13	(21)	$R(a,c)$	17,20 $\to$E	
1, 2	(22)	$R(a,b) \,\&\, R(b,c) \to R(a,c)$	13,21 $\to$I	
1, 2	(23)	$\forall z (R(a,b) \,\&\, R(b,z) \to R(a,z))$	22 $\forall$I	
1, 2	(24)	$\forall y \forall z (R(a,y) \,\&\, R(y,z) \to R(a,z))$	23 $\forall$I	
1, 2	(25)	$\forall x \forall y \forall z (R(x,y) \,\&\, R(y,z) \to R(x,z))$	24 $\forall$I	transitiv
1, 2	(26)	reflexiv & symmetrisk	1,12 &I	
1, 2	(27)	(reflexiv & symmetrisk) & transitiv	25,26 &I	

8.5.III.(3)

R är euklidisk $\vdash$ R är sammanhängande

d.v.s. $\forall x \forall y \forall z(R(x,y) \,\&\, R(x,z) \to R(y,z)) \vdash \forall x \forall y \forall z(R(x,y) \,\&\, R(x,z) \to (R(y,z) \vee R(z,y)))$

1	(1)	$\forall x \forall y \forall z(R(x,y) \,\&\, R(x,z) \to R(y,z))$	*Premiss*
2	(2)	$R(a,b) \,\&\, R(a,c)$	*Antagande*
1	(3)	$\forall y \forall z(R(a,y) \,\&\, R(a,z) \to R(y,z))$	1 ∀E
1	(4)	$\forall z(R(a,b) \,\&\, R(a,z) \to R(b,z))$	3 ∀E
1	(5)	$R(a,b) \,\&\, R(a,c) \to R(b,c)$	4 ∀E
$1,2$	(6)	$R(b,c)$	2,5 →E
$1,2$	(7)	$R(b,c) \vee R(c,b)$	6 ∨I
1	(8)	$R(a,b) \,\&\, R(a,c) \to (R(b,c) \vee R(c,b))$	2,7 →I
1	(9)	$\forall z(R(a,b) \,\&\, R(a,z) \to (R(b,z) \vee R(z,b)))$	8 ∀I
1	(10)	$\forall y \forall z(R(a,y) \,\&\, R(a,z) \to (R(y,z) \vee R(z,y)))$	9 ∀I
1	(11)	$\forall x \forall y \forall z(R(x,y) \,\&\, R(x,z) \to (R(y,z) \vee R(z,y)))$	10 ∀I

8.5.III.(4)

Visa: R är seriell, R är symmetrisk, R Euklidisk $\vdash_{NK}$ R är reflexiv

Skiss Allt ska vara relaterat till något, så det godtyckliga elementet a är relaterat till något, kalla det b. Vänd på relationen, och kopiera den, så har vi två relationer som båda börjar med b. Enligt euklidiskiteten ska då deras andra ändor (alltså a) vara relaterade till varandra.

1	(1)	$\forall x \exists y R(x,y)$	*Premiss*	seriell
2	(2)	$\forall x \forall y(R(x,y) \to R(y,x))$	*Premiss*	symmetrisk
3	(3)	$\forall x \forall y \forall z(R(x,y) \,\&\, R(x,z) \to R(y,z))$	*Premiss*	euklidisk
1	(4)	$\exists y R(a,y)$	1 ∀E	
5	(5)	$R(a,b)$	*Antagande*	
2	(6)	$\forall y(R(a,y) \to R(y,a))$	2 ∀E	
2	(7)	$R(a,b) \to R(b,a)$	6 ∀E	
$2,5$	(8)	$R(b,a)$	5,7 →E	
$2,5$	(9)	$R(b,a) \,\&\, R(b,a)$	8,8 &I	
3	(10)	$\forall y \forall z(R(b,y) \,\&\, R(b,z) \to R(y,z)$	3 ∀E	
3	(11)	$\forall z(R(b,a) \,\&\, R(b,z) \to R(a,z))$	10 ∀E	
3	(12)	$R(b,a) \,\&\, R(b,a) \to R(a,a)$	11 ∀E	
$2,3,5$	(13)	$R(a,a)$	9,12 →E	
$1,2,3$	(14)	$R(a,a)$	4,5,13 ∃E	
$1,2,3$	(15)	$\forall x R(x,x)$	14 ∀I	reflexiv