Några lösta uppgifter ur kapitel 4

4.2.4 Visa $A \to B \vdash A \,\&\, B \to B \,\&\, C$

1	(1)	$A \to B$	*Premiss*
2	(2)	$A \,\&\, C$	*Antagande*
2	(3)	A	2 &E
1, 2	(4)	B	1,3 →E
2	(5)	C	2 &E
1, 2	(6)	$B \,\&\, C$	4,5 &I
1	(7)	$A \,\&\, C \to B \,\&\, C$	2,6 →I

4.2.8 Visa $A \to B \vdash (C \to A) \to (C \to B)$

1	(1)	$A \to B$	*Premiss*
2	(2)	$C \to A$	*Antagande*
3	(3)	C	*Antagande*
2, 3	(4)	A	2,3 →E
1, 2, 3	(5)	B	1,4 →E
1, 2	(6)	$C \to B$	3,5 →I
1	(7)	$(C \to A) \to (C \to B)$	2,6 →I

4.2.12 Visa $C \to A, C \to (A \to B) \vdash C \to A \,\&\, B$

1	(1)	$C \to A$	*Premiss*
2	(2)	$C \to (A \to B)$	*Premiss*
3	(3)	C	*Antagande*
1, 3	(4)	A	1,3 →E
2, 3	(5)	$A \to B$	2,3 →E
1, 2, 3	(6)	B	4,5 →E
1, 2, 3	(7)	$A \,\&\, B$	4,6 &I
1, 2	(8)	$C \to A \,\&\, B$	3,7 →I

4.3.1 Visa $\vdash A \,\&\, B \to B \,\&\, A$

1	(1)	$A \,\&\, B$	*Antagande*
1	(2)	A	1 &E
1	(3)	B	1 &E
1	(4)	$B \,\&\, A$	2,3 &I
	(5)	$A \,\&\, B \to B \,\&\, A$	1,4 →I

4.3.2 Visa $\vdash (A \to B) \to (A \to B)$

1	(1)	$A \to B$	*Antagande*
2	(2)	A	*Antagande*
1, 2	(3)	B	1,2 →E
1	(4)	$A \to B$	2,3 →I
	(5)	$(A \to B) \to (A \to B)$	1,4 →I

4.4.6 Visa $\sim(A \,\&\, B), A \vdash \sim B$

1	(1)	$\sim(A \,\&\, B)$	*Premiss*
2	(2)	A	*Premiss*
3	(3)	B	*Antagande*
2, 3	(4)	$A \,\&\, B$	2,3 &I
1, 2, 3	(5)	$\curlywedge$	1,4 ∼E
1, 2	(6)	$\sim B$	3,5 ∼I

4.4.15 Visa $A \to {\sim}(B \,\&\, C),\ B \to C \vdash A \to {\sim}B$

1	(1)	$A \to {\sim}(B \,\&\, C)$	*Premiss*
2	(2)	$B \to C$	*Premiss*
3	(3)	A	*Antagande*
4	(4)	B	*Antagande*
2, 4	(5)	C	2,4 $\to$E
2, 4	(6)	$B \,\&\, C$	4,5 &I
1, 3	(7)	${\sim}(B \,\&\, C)$	1,3 $\to$E
1, 2, 3, 4	(8)	$\curlywedge$	6,7 $\sim$E
1, 2, 3	(9)	${\sim}B$	4,8 $\sim$I
1, 2	(10)	$A \to {\sim}B$	3,10 $\to$I

4.4.22 Visa ${\sim}(A \to B) \vdash A \,\&\, {\sim}B$ och $A \,\&\, {\sim}B \vdash {\sim}(A \to B)$

1	(1)	${\sim}(A \to B)$	*Premiss*
2	(2)	${\sim}A$	*Antagande*
3	(3)	A	*Antagande*
4	(4)	${\sim}B$	*Antagande*
2, 3	(5)	$\curlywedge$	2,3 $\sim$E
2, 3	(6)	${\sim}{\sim}B$	4,5 $\sim$I
2, 3	(7)	B	6 DN
2	(8)	$A \to B$	$\to$ 3, 7
1, 2	(9)	$\curlywedge$	1,8 $\sim$E
1	(10)	${\sim}{\sim}A$	2,9 $\sim$I
1	(11)	A	10 DN
12	(12)	B	*Antagande*
13	(13)	A	*Antagande*
12	(14)	B	12
12	(15)	$A \to B$	13,14 $\to$I
1, 12	(16)	$\curlywedge$	1,15 $\sim$E
1	(17)	${\sim}B$	12,16 $\sim$I
1	(18)	$A \,\&\, {\sim}B$	11,17 &I

1	(1)	$A \,\&\, {\sim}B$	*Premiss*
2	(2)	$A \to B$	*Antagande*
1, 2	(3)	A	1 &E
1, 2	(4)	B	1,2 $\to$E
1, 2	(5)	${\sim}B$	1 &E
1, 2	(6)	$\curlywedge$	4,5 $\sim$E
1	(7)	${\sim}(A \to B)$	2,6 $\sim$I

4.5.8 Visa $A \vee B,\ A \to B,\ B \to A \vdash A \,\&\, B$

1	(1)	$A \vee B$	*Premiss*
2	(2)	$A \to B$	*Premiss*
3	(3)	$B \to A$	*Premiss*
4	(4)	A	*Antagande*
2, 4	(5)	B	2,4 $\to$E
2, 4	(6)	$A \,\&\, B$	4,5 &I
7	(7)	B	*Antagande*
3, 7	(8)	A	3,7 $\to$E
3, 7	(9)	$A \,\&\, B$	7,8 &I
1, 2, 3	(10)	$A \,\&\, B$	1,4,6,7,9 $\vee$E

4.5.14 Visa $A \,\&\, B \vdash {\sim}({\sim}A \vee {\sim}B)$ och ${\sim}({\sim}A \vee {\sim}B) \vdash A \,\&\, B$

1	(1)	$A \,\&\, B$	*Premiss*
2	(2)	${\sim}A \vee {\sim}B$	*Antagande*
1	(3)	A	1 &E
1	(4)	B	1 &E
5	(5)	${\sim}A$	*Antagande*
$1, 5$	(6)	$\curlywedge$	3,5 $\sim$E
7	(7)	${\sim}B$	*Antagande*
$1, 7$	(8)	$\curlywedge$	4,7 $\sim$E
$1, 2$	(9)	$\curlywedge$	2,5,6,7,8 $\vee$E
1	(10)	${\sim}({\sim}A \vee {\sim}B)$	2,9 $\sim$I

1	(1)	${\sim}({\sim}A \vee {\sim}B)$	*Premiss*
2	(2)	${\sim}A$	*Antagande*
2	(3)	${\sim}A \vee {\sim}B$	2 $\vee$I
$1, 2$	(4)	$\curlywedge$	1,3 $\sim$E
1	(5)	${\sim}{\sim}A$	2,4 $\sim$I
1	(6)	A	5 DN
7	(7)	${\sim}B$	*Antagande*
7	(8)	${\sim}A \vee {\sim}B$	7 $\vee$I
$1, 7$	(9)	$\curlywedge$	1,8 $\sim$E
1	(10)	${\sim}{\sim}B$	7,9 $\sim$I
1	(11)	B	10 DN
1	(12)	$A \,\&\, B$	6,11 &I

4.5.17 Visa $A \rightarrow B \vdash {\sim}A \vee B$ och ${\sim}A \vee B \vdash A \rightarrow B$.

1	(1)	$A \rightarrow B$	*Premiss*
2	(2)	${\sim}({\sim}A \vee B)$	*Antagande*
3	(3)	A	*Antagande*
$1, 3$	(4)	B	1,3 $\rightarrow$E
$1, 3$	(5)	${\sim}A \vee B$	4 $\vee$I
$1, 2, 3$	(6)	$\curlywedge$	2,5 $\sim$E
$1, 2$	(7)	${\sim}A$	3,6 $\sim$I
$1, 2$	(8)	${\sim}A \vee B$	7 $\vee$I
$1, 2$	(9)	$\curlywedge$	2,8 $\sim$E
1	(10)	${\sim}{\sim}({\sim}A \vee B)$	2,9 $\sim$I
1	(11)	${\sim}A \vee B$	10 DN

1	(1)	${\sim}A \vee B$	*Premiss*
2	(2)	A	*Antagande*
3	(3)	${\sim}B$	*Antagande*
4	(4)	${\sim}A$	*Antagande*
$2, 4$	(5)	$\curlywedge$	2,4 $\sim$E
6	(6)	B	*Antagande*
$3, 6$	(7)	$\curlywedge$	3,6 $\sim$E
$1, 2, 3$	(8)	$\curlywedge$	1,4,5,6,7 $\vee$E
$1, 2$	(9)	${\sim}{\sim}B$	3,8 $\sim$E
$1, 2$	(10)	B	9 DN
1	(11)	$A \rightarrow B$	2,10 $\rightarrow$I

4.5.18 Visa $\sim(A \rightarrow B) \dashv\vdash \sim(\sim A \vee B)$

1	(1)	$\sim(A \rightarrow B)$	*Premiss*
2	(2)	$\sim A \vee B$	*Antagande*
3	(3)	$\sim A$	*Antagande*
4	(4)	A	*Antagande*
5	(5)	$\sim B$	*Antagande*
3, 4	(6)	⅄	3,4 $\sim$E
3, 4	(7)	$\sim\sim B$	5,6 $\sim$I
3, 4	(8)	B	7 DN
3	(9)	$A \rightarrow B$	4,8 $\rightarrow$I
10	(10)	B	*Antagande*
11	(11)	A	*Antagande*
10	(12)	B	10
10	(13)	$A \rightarrow B$	11,12 $\rightarrow$I
2	(14)	$A \rightarrow B$	2,3,9,10,13 $\vee$E
1, 2	(15)	⅄	1,14 $\sim$E
1	(16)	$\sim(\sim A \vee B)$	2,15 $\sim$I

1	(1)	$\sim(\sim A \vee B)$	*Premiss*
2	(2)	$A \rightarrow B$	*Antagande*
3	(3)	B	*Antagande*
3	(4)	$\sim A \vee B$	3 $\vee$I
1, 3	(5)	⅄	1,4 $\sim$E
1	(6)	$\sim B$	3,5 $\sim$I
7	(7)	A	*Antagande*
2, 7	(8)	B	2,7 $\rightarrow$E
1, 2, 7	(9)	⅄	6,8 $\sim$E
1, 2	(10)	$\sim A$	7,9 $\sim$I
1, 2	(11)	$\sim A \vee B$	10 $\vee$I
1, 2	(12)	⅄	1,11 $\sim$E
1	(13)	$\sim(A \rightarrow B)$	2,12 $\sim$I

4.6.8 Visa $A \,\&\, B \vdash A \leftrightarrow B$

1	(1)	$A \,\&\, B$	*Premiss*
2	(2)	A	*Antagande*
1	(3)	B	1 &E
1	(4)	$A \rightarrow B$	2,3 $\rightarrow$I
5	(5)	B	*Antagande*
1	(6)	A	1 &E
1	(7)	$B \rightarrow A$	5,6 $\rightarrow$I
1	(8)	$(A \rightarrow B) \,\&\, (B \rightarrow A)$	4,7 &I
1	(9)	$A \leftrightarrow B$	8 Df

4.6.14 Visa $\sim A \vee C, \sim B \vee \sim C \vdash A \to \sim(A \leftrightarrow B)$

1	(1)	$\sim A \vee C$	*Premiss*
2	(2)	$\sim B \vee \sim C$	*Premiss*
3	(3)	A	*Antagande*
4	(4)	$A \leftrightarrow B$	*Antagande*
4	(5)	$(A \to B) \,\&\, (B \to A)$	4 Df
6	(6)	$\sim A$	*Antagande*
7	(7)	$\sim C$	*Antagande*
$3, 6$	(8)	$\curlywedge$	3,6 $\sim$E
$3, 6$	(9)	C	7,8 $\sim$I
10	(10)	C	*Antagande*
$1, 3$	(11)	C	1,6,8,10 $\vee$E
12	(12)	$\sim B$	*Antagande*
4	(13)	$A \to B$	5 &E
$3, 4$	(14)	B	3,13 $\to$E
$3, 4, 12$	(15)	$\curlywedge$	12,14 $\sim$E
16	(16)	$\sim C$	*Antagande*
$1, 3, 16$	(17)	$\curlywedge$	11,16 $\sim$E
$1, 2, 3, 4$	(18)	$\curlywedge$	2,12,15,16,17 $\vee$E
$1, 2, 3$	(19)	$\sim(A \leftrightarrow B)$	4,18 $\sim$I
$1, 2$	(20)	$A \to \sim(A \leftrightarrow B)$	3,19 $\to$I

4.8.6 Visa $\sim(A \to B \vee C) \vdash B \vee C \to A$

1	(1)	$\sim(A \to B \vee C)$	*Premiss*
1	(2)	$A \,\&\, \sim(B \vee C)$	$1\, Neg - Imp$
1	(3)	A	2 &E
4	(4)	$B \vee C$	*Antagande*
1	(5)	A	3
1	(6)	$B \vee C \to A$	$\to 4, 5$

4.11.2 a. Mängden är inte konsistent. Det visa på följande sätt:

1	(1)	$A \vee B$	*Premiss*
2	(2)	$\sim A \to \sim B$	*Premiss*
3	(3)	$\sim A$	*Premiss*
$2, 3$	(4)	$\sim B$	2,3 $\to$E
5	(5)	A	*Antagande*
$3, 5$	(6)	$\curlywedge$	3,5 $\sim$E
7	(7)	B	*Antagande*
$2, 3, 7$	(8)	$\curlywedge$	4,7 $\sim$E
$1, 2, 3$	(9)	$\curlywedge$	1,5,6,7,8 $\vee$E

b. Mängden är konsistent. Om A, B, C alla är falska blir alla fyra sentenserna sanna.

c. Mängden är inte konsistent. Det visa på följande sätt:

1	(1)	$A \vee B$	*Premiss*
2	(2)	$\sim A \vee \sim B$	*Premiss*
3	(3)	$A \leftrightarrow B$	*Premiss*
3	(4)	$(A \rightarrow B) \,\&\, (B \rightarrow A)$	3 Df
5	(5)	A	*Antagande*
3	(6)	$A \rightarrow B$	4 &E
$3, 5$	(7)	B	5,6 $\rightarrow$E
8	(8)	$\sim A$	*Antagande*
$5, 8$	(9)	$\curlywedge$	5,8 $\sim$E
10	(10)	$\sim B$	*Antagande*
$3, 5, 10$	(11)	$\curlywedge$	7,10 $\sim$E
$2, 3, 5$	(12)	$\curlywedge$	2,8,9,10,11 $\vee$E
$2, 3$	(13)	$\sim A$	5,12 $\sim$I
14	(14)	A	*Antagande*
$2, 3, 14$	(15)	$\curlywedge$	13,14 $\sim$E
16	(16)	B	*Antagande*
3	(17)	$B \rightarrow A$	4 &E
$3, 16$	(18)	A	16,17 $\rightarrow$E
$2, 3, 16$	(19)	$\curlywedge$	13,18 $\sim$E
$1, 2, 3$	(20)	$\curlywedge$	1,14,15,16,19 $\vee$E