

(F5, fr 26 mars 2004)

Naturlig deduktion för satslogik

$$p_1, \dots, p_n \vdash q$$

Ett **härledningssystem** med formella regler (dvs **syntaktiska** regler, de styrs bara av sentensernas **form**), "en lek med symboler" (i motsats till det semantiska begreppet logisk följd, $\models$).

Alla reglerna $\&E, \&I, \rightarrow E, \rightarrow I, \sim E, \sim I, \vee E, \vee I, DN, (EFQ), Df$ (för $\leftrightarrow$) finns samlade på framsidans insida i kursboken.

Som alternativ till **Df** är det tillåtet att använda

Rule of $\leftrightarrow E$:

$$\begin{array}{c} a_1, \dots, a_m \quad (j) \quad p \leftrightarrow q \\ \text{(or } a_1, \dots, a_m \quad (j) \quad q \leftrightarrow p) \\ \vdots \\ b_1, \dots, b_n \quad (k) \quad p \\ \vdots \\ a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n \quad (l) \quad q \end{array} \quad j, k \leftrightarrow E$$

Rule of $\leftrightarrow I$:

$$\begin{array}{c} g \quad (g) \quad p \quad \text{Assumption} \\ \vdots \\ a_1, \dots, a_m \quad (h) \quad q \\ \vdots \\ j \quad (j) \quad q \quad \text{Assumption} \\ \vdots \\ b_1, \dots, b_n \quad (k) \quad p \\ \vdots \\ X \quad (l) \quad p \leftrightarrow q \quad g, h, j, k \leftrightarrow I \\ \text{where } X = \{a_1, \dots, a_m\}/g \cup \{b_1, \dots, b_n\}/j \end{array}$$

Dessutom kan man använda resultat man visat som hjälpsatser, s.k. **SI-regler** eller härledda regler, (a)-(r) på sid. 123 i boken.

Sundhets- och fullständighetssatsen för naturlig deduktion i satslogik:

Om Γ är en godtycklig mängd sentenser och q en sentens gäller

$$\Gamma \vdash q \Leftrightarrow \Gamma \models q,$$

dvs naturlig deduktion är ett **sunt** ($\Rightarrow$) och **fullständigt** ($\Leftarrow$) härledningssystem.

Speciellt

$$\vdash p \Leftrightarrow \models p$$

dvs en sentens är ett teorem (i naturlig deduktion) om och endast om den är en tautologi.

Ekvivalent (Δ en godtycklig sentensmängd):

$$\Delta \not\vdash \perp \Leftrightarrow \Delta \not\models \perp$$

(dvs Δ **konsistent** $\Leftrightarrow \Delta$ **satisfierbar**).