

(F19, fr 14 maj 2004)

Om andra ordningens predikatlogik

Syntax: Predikatvariabler (med viss "ställighet") $X, Y, \dots$

funktionsvariabler (också med sin ställighet) $u, v, \dots$

Förekommer som motsvarande predikatsymboler och funktionssymboler.

Kvantifiering: $\forall X, \exists X, \forall u, \exists u, \dots$

Semantik: X/u kan "vara" **vilken** relation / funktion av rätt ställighet **som helst** på domänen.

Kan **definiera likhet:** $a = b \equiv \forall X (Xa \rightarrow Xb)$

Kompakthetssatsen gäller **inte** i andra ordningens predikatlogik.

Det finns **inget** sunt och fullständigt härledningssystem för andra ordningens predikatlogik.

Lite om oändliga mängder

Mängdteorin kan ses som grunden för all matematik.

Definition: Ett **ordinaltal** är en mängd X så att

- X är **välordnad** m.a.p. $\subset$
- för alla $a \in X$ gäller $a = X_a = \{x \in X \mid x \subset a\}$

För ordinaltal definieras **efterföljaren** $S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$.

Naturliga tal identifieras med ordinaltal, $n = \{0, 1, \dots, n-1\}$.

Andra ex. $\omega = \{0, 1, 2, \dots\} (= \mathbb{N})$, $\omega + 1 = S(\omega) = \{0, 1, 2, \dots, \omega\}$, $\omega \cdot 2 = \{0, 1, \dots, \omega, \omega + 1, \dots\} \dots$

Ett **gränsordinaltal** är ett ordinaltal som varken är 0 eller $S(\alpha)$ för något ordinaltal α . Exempel på gränsordinaltal är ω och $\omega \cdot 2$.

- alla element i ordinaltal är ordinaltal
- varje mängd av ordinaltal är välordnad
- varje välordnad mängd är isomorf med ett entydigt ordinaltal
- om α och β är ordinaltal gäller $\alpha \subset \beta \Leftrightarrow \alpha \in \beta$, vi skriver då $\alpha < \beta$
- om $\mathcal{M}$ är en mängd ordinaltal, är $\sup \mathcal{M} = \cup \mathcal{M}$, unionen av alla element i $\mathcal{M}$, det minsta ordinaltalet större än eller lika med alla i $\mathcal{M}$
- $\mathcal{O} = \{ \text{alla ordinaltal} \}$ är **inte** en mängd!! Vi säger att det är en **klass** och kan ändå skriva t.ex. $\alpha \in \mathcal{O}$ för att ange att α är ett ordinaltal

Man kan inte bilda mängder hur som helst!

$\{x \mid Px\}$, där P är en väldefinierad egenskap, definierar inte alltid en mängd, ex. **Russels paradox:** Om $p = \{x \mid x \notin x\}$ definierade en mängd skulle, för alla a , $a \in p \Leftrightarrow a \notin a$, speciellt $p \in p \Leftrightarrow p \notin p$, motsägelse.

Med **transfinit rekursion** definieras **addition** av ordinaltal:

För alla $\alpha \in \mathcal{O}$: $\alpha + 0 = \alpha$
 $\alpha + \beta = S(\alpha + \gamma) \qquad \beta = S(\gamma)$
 $\alpha + \beta = \sup\{\alpha + \gamma \mid \gamma \in \beta\}$, β ett gränsordinaltal

Alternativ rekursiv definition: $\alpha + \beta = \alpha \cup \{\alpha + \gamma \mid \gamma \in \beta\}$.

Addition är **inte kommutativ** men **associativ** på $\mathcal{O}$,

t.ex. $\omega + 1 = S(\omega) \neq 1 + \omega = \sup\{1 + n \mid n \in \omega\} = \omega$,

men $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ (visas med transfinit induktion).

Subtraktion från vänster i $\mathcal{O}$:

Om $\alpha, \beta \in \mathcal{O}$, $\alpha \leq \beta$, finns ett entydigt $\xi \in \mathcal{O}$ med $\alpha + \xi = \beta$.