Institutionen för matematik
KTH
Bengt Ek

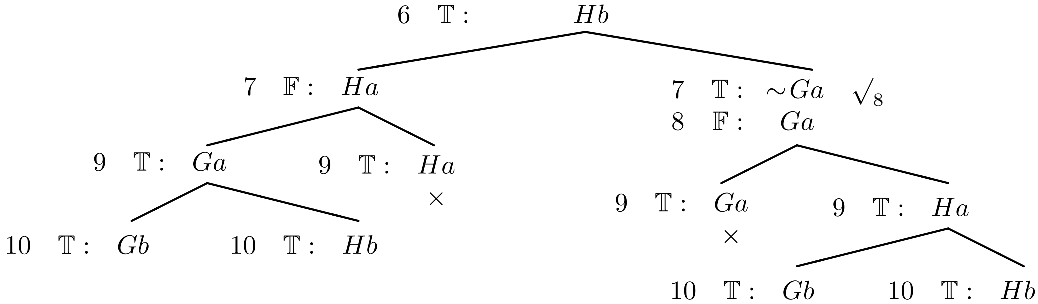
$$\forall x\,\exists y\,((Fx \to A)\,\&\,(B \vee Fy))\,\&\,(((A \leftrightarrow A) \leftrightarrow (B \leftrightarrow B)) \leftrightarrow (A \leftrightarrow B))$$

Svar till KS3 i Logik för D1, 13 maj 2004

A1) För att avgöra om $\exists x\,(Hx \to \sim Gx),\ \forall x\,(Gx \vee Hx) \vDash \sim\exists x\,(Gx\,\&\,Hx)$ söker vi motexempel (tolkningar som gör premisserna sanna och slutsatsen falsk):

I tablån växlar de tre faserna enligt:
1. Satslogiska 1; 6–10
2. $\mathbb{T}\exists, \mathbb{F}\forall$ 2,3
3. $\mathbb{T}\forall, \mathbb{F}\exists$ 4,5

	$\mathbb{T}:$	$\exists x\,(Hx \to \sim Gx)$	$\surd_{2:a}$
	$\mathbb{T}:$	$\forall x\,(Gx \vee Hx)$	a_4, b_5
	$\mathbb{F}:$	$\sim\exists x\,(Gx\,\&\,Hx)$	$\surd_1$
1	$\mathbb{T}:$	$\exists x\,(Gx\,\&\,Hx)$	$\surd_{3:b}$
2	$\mathbb{T}:$	$Ha \to \sim Ga$	$\surd_7$
3	$\mathbb{T}:$	$Gb\,\&\,Hb$	$\surd_6$
4	$\mathbb{T}:$	$Ga \vee Ha$	$\surd_9$
5	$\mathbb{T}:$	$Gb \vee Hb$	$\surd_{10}$
6	$\mathbb{T}:$	Gb	
6	$\mathbb{T}:$	Hb	



Tablån sluter sig inte, så slutledningen är **inte giltig**. Motexempel läses av i de öppna vägarna:

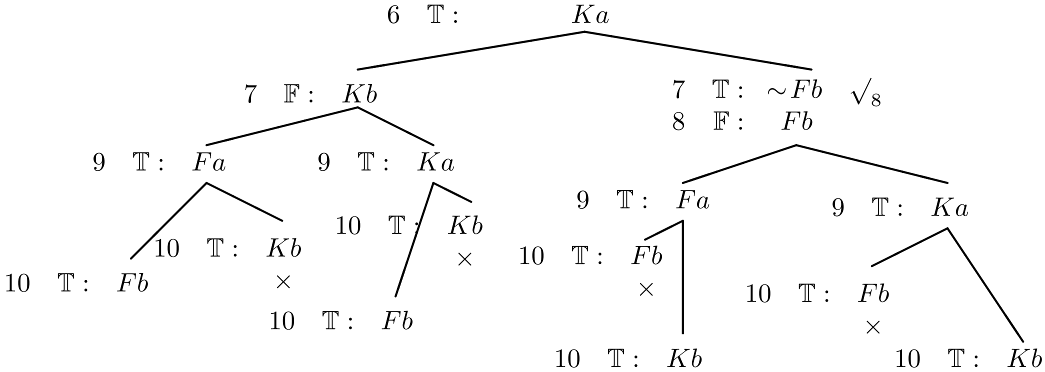
	G	H
α	+	−
β	+	+

	G	H
α	−	+
β	+	+

B1) För att avgöra om $\forall x\,(Fx \vee Kx),\ \exists x\,(Fx\,\&\,Kx) \vDash \sim\exists x\,(Kx \to \sim Fx)$ söker vi motexempel (tolkningar som gör premisserna sanna och slutsatsen falsk):

I tablån växlar de tre faserna enligt:
1. Satslogiska 1; 6–10
2. $\mathbb{T}\exists, \mathbb{F}\forall$ 2,3
3. $\mathbb{T}\forall, \mathbb{F}\exists$ 4,5

	$\mathbb{T}:$	$\forall x\,(Fx \vee Kx)$	a_4, b_5
	$\mathbb{T}:$	$\exists x\,(Fx\,\&\,Kx)$	$\surd_{2:a}$
	$\mathbb{F}:$	$\sim\exists x\,(Kx \to \sim Fx)$	$\surd_1$
1	$\mathbb{T}:$	$\exists x\,(Kx \to \sim Fx)$	$\surd_{3:b}$
2	$\mathbb{T}:$	$Fa\,\&\,Ka$	$\surd_6$
3	$\mathbb{T}:$	$Kb \to \sim Fb$	$\surd_7$
4	$\mathbb{T}:$	$Fa \vee Ka$	$\surd_9$
5	$\mathbb{T}:$	$Fb \vee Kb$	$\surd_{10}$
6	$\mathbb{T}:$	Fa	
6	$\mathbb{T}:$	Ka	



Tablån sluter sig inte, så slutledningen är **inte giltig**. Motexempel läses av i de öppna vägarna:

	F	K
α	+	+
β	+	−

	F	K
α	+	+
β	−	+

A2) Vi skall visa att $\forall x \forall y\,(Rxy \rightarrow x \neq y) \ \vdash\ \sim\exists x\, Rxx$.

Idé: Antag $\exists x\, Rxx$, så Raa för något a. Enligt premissen gäller $Raa \rightarrow a \neq a$, så $a \neq a$. Motsägelse (mot =I-regeln).

1	(1)	$\forall x \forall y\,(Rxy \rightarrow x \neq y)$	premiss		
2	(2)	$\exists x\, Rxx$	antagande		
3	(3)	Raa	antagande		
1	(4)	$\forall y\,(Ray \rightarrow a \neq y)$	1	$\forall$E	
1	(5)	$Raa \rightarrow a \neq a$	4	$\forall$E	
1,3	(6)	$a \neq a$	5,3	$\rightarrow$E	
	(7)	$a = a$		=I	
1,3	(8)	$\curlywedge$	6,7	$\sim$E	
1,2	(9)	$\curlywedge$	2,3,8	$\exists$E	[a inte i (2),(8),(1)]
1	(10)	$\sim\exists x\, Rxx$	2,9	$\sim$I	

Eftersom sentensen på rad 10 bara beror av premissen på rad 1 är beviset klart.

B2) Vi skall visa att $\exists x\, Sxx \ \vdash\ \sim\forall x \forall y\,(Sxy \rightarrow x \neq y)$.

Idé: Enligt premissen gäller Saa för något a. Antag $\forall x \forall y\,(Sxy \rightarrow x \neq y)$, så $Saa \rightarrow a \neq a$, så $a \neq a$. Motsägelse (mot =I-regeln).

1	(1)	$\exists x\, Sxx$	premiss		
2	(2)	Saa	antagande		
3	(3)	$\forall x \forall y\,(Sxy \rightarrow x \neq y)$	antagande		
3	(4)	$\forall y\,(Say \rightarrow a \neq y)$	3	$\forall$E	
3	(5)	$Saa \rightarrow a \neq a$	4	$\forall$E	
2,3	(6)	$a \neq a$	5,2	$\rightarrow$E	
	(7)	$a = a$		=I	
2,3	(8)	$\curlywedge$	6,7	$\sim$E	
1,3	(9)	$\curlywedge$	1,2,8	$\exists$E	[a inte i (1),(8),(3)]
1	(10)	$\sim\forall x \forall y\,(Sxy \rightarrow x \neq y)$	3,9	$\sim$I	

Eftersom sentensen på rad 10 bara beror av premissen på rad 1 är beviset klart.

AB3) (Nedan skall $\mathcal{T}, \Xi$ läsas som $\mathcal{S}, \Gamma$ i A3) och som $\mathcal{R}, \Delta$ i B3).)
$\mathcal{T}$ är en ekvivalensrelation, ty den är reflexiv, symmetrisk och transitiv.
Att $\mathcal{T}$ är **reflexiv** betyder att $\mathcal{T}uu$ är uppfyllt för alla u i mängden. Detta följer av regeln =I: Oberoende av vad som finns tidigare i härledningen kan vi skriva $u = u$ på en rad, så $\Xi \ \vdash\ u = u$, dvs $\mathcal{T}uu$.
Att $\mathcal{T}$ är **symmetrisk** betyder att $\mathcal{T}uv \ \Rightarrow\ \mathcal{T}vu$ för alla u, v i mängden. Antag alltså att $\mathcal{T}uv$, dvs $\Xi \ \vdash\ u = v$. Med =I-regeln får man $u = u$ och sedan med regeln =E av $u = v$ och $u = u$ att $v = u$. Totalt alltså $\Xi \ \vdash\ v = u$, dvs $\mathcal{T}vu$.
Att $\mathcal{T}$ är **transitiv** betyder att $\mathcal{T}uv$ och $\mathcal{T}vw$ medför $\mathcal{T}uw$. Antag att $\mathcal{T}uv$ och $\mathcal{T}vw$ är sanna, dvs $\Xi \ \vdash\ u = v$ och $\Xi \ \vdash\ v = w$. Från $u = v$ och $v = w$ fås med =E-regeln $u = w$, så tillsammans $\Xi \ \vdash\ u = w$, dvs $\mathcal{T}uw$.