

$$(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (A \vee B)$$

Svar till KS2 i Logik för D1, 29 april 2004

- 1) • "Men" betyder sanningsvärdesmässigt detsamma som "och".
 • " p är ett nödvändigt villkor för q " är falskt precis om p är falsk och q är sann, dvs är liktydigt med " p om q " och kan översättas med $q \rightarrow p$.

A1) Vi har "Det är inte så att alla hundar skäller, men ett nödvändigt villkor för att någon katt skall vara rädd är att minst en hund skäller",
 dvs "Dels gäller inte att för alla x (Hx ger Sx) och dels gäller (om för något x (Kx och Rx) så för något x (Hx och Sx))",
 dvs **svaret:** $\sim \forall x (Hx \rightarrow Sx) \ \& \ (\exists x (Kx \ \& \ Rx) \rightarrow \exists x (Hx \ \& \ Sx))$.

B1) Vi har "Det är inte så att alla pojkar är glada, men ett nödvändigt villkor för att någon pojke skall vara glad är att minst en flicka skrattar",
 dvs "Dels gäller inte att för alla x (Px ger Gx) och dels gäller (om för något x (Px och Gx) så för något x (Fx och Sx))",
 dvs **svaret:** $\sim \forall x (Px \rightarrow Gx) \ \& \ (\exists x (Px \ \& \ Gx) \rightarrow \exists x (Fx \ \& \ Sx))$.

Andra, logiskt ekvivalenta, svar kan godtas.

A2) En tolkning visar att $\exists x (Fx \rightarrow \forall y Gy) \not\models \exists x (Gx \vee \forall y \sim Fy)$ precis om den gör $\exists x (Fx \rightarrow \forall y Gy)$ sann och $\exists x (Gx \vee \forall y \sim Fy)$ falsk.
 Det senare betyder precis att för **alla s** är $Gs \vee \forall y \sim Fy$ falsk, dvs **Gs falsk** och $\forall y \sim Fy$ likaså, dvs för **något t** är $\sim Ft$ falsk, dvs **Ft sann**.
 $\exists x (Fx \rightarrow \forall y Gy)$ blir då sann om för **något u** $Fu \rightarrow \forall y Gy$ är sann. Men enligt nyss är $\forall y Gy$ falsk i den sökta tolkningen. Enda möjligheten blir alltså att **Fu är falsk**.

Detta leder till tolkningen: $D = \{\alpha, \beta\}$,

	F	G
α	+	-
β	-	-

B2) En tolkning visar att $\forall x (\sim Hx \vee \exists y Ky) \not\models \forall x (\forall y Hy \rightarrow Kx)$ precis om den gör $\forall x (\sim Hx \vee \exists y Ky)$ sann och $\forall x (\forall y Hy \rightarrow Kx)$ falsk.

Det senare betyder precis att för **något s** är $\forall y Hy \rightarrow Ks$ falsk, dvs $\forall y Hy$ sann (dvs **Ht sann** för **alla t**) och **Ks falsk**.

$\forall x (\sim Hx \vee \exists y Ky)$ blir då sann om $\sim Hu \vee \exists y Ky$ är sann för **alla u**. Men enligt nyss är Hu sann i den sökta tolkningen, dvs $\sim Hu$ falsk. Enda möjligheten blir alltså att $\exists y Ky$ är sann, dvs **Kv är sann** för **något v**.

Detta leder till tolkningen: $D = \{\alpha, \beta\}$,

	H	K
α	+	-
β	+	+

A3) Vi skall visa att $\forall x (Kx \rightarrow \sim Fx), \sim \exists x (Fx \& \sim Kx) \vdash \forall x \sim Fx$.

Idé: För att visa $\sim Fa$ för godtyckligt a , antas Fa . Enligt den första premissen kan då inte Ka gälla, dvs man får $\sim Ka$, men det ger motsägelse mot den andra premissen.

1	(1)	$\forall x (Kx \rightarrow \sim Fx)$	premiss	
2	(2)	$\sim \exists x (Fx \& \sim Kx)$	premiss	
3	(3)	Fa	antagande	
4	(4)	Ka	antagande	
1	(5)	$Ka \rightarrow \sim Fa$	1	$\forall E$
1,4	(6)	$\sim Fa$	5,4	$\rightarrow E$
1,3,4	(7)	$\wedge$	6,3	$\sim E$
1,3	(8)	$\sim Ka$	4,7	$\sim I$
1,3	(9)	$Fa \& \sim Ka$	3,8	$\& I$
1,3	(10)	$\exists x (Fx \& \sim Kx)$	9	$\exists I$
1,2,3	(11)	$\wedge$	2,10	$\sim E$
1,2	(12)	$\sim Fa$	3,11	$\sim I$
1,2	(13)	$\forall x \sim Fx$	12	$\forall I$ [a inte i (1),(2)]

Eftersom sentensen på rad 13 bara beror av premisserna på raderna 1 och 2 är beviset klart.

B3) Vi skall visa att $\sim \exists x (\sim Gx \& Hx), \forall x (Gx \rightarrow \sim Hx) \vdash \forall x \sim Hx$.

Idé: För att visa $\sim Ha$ för godtyckligt a , antas Ha . Enligt den andra premissen kan då inte Ga gälla, dvs man får $\sim Ga$, men det ger motsägelse mot den första premissen.

1	(1)	$\sim \exists x (\sim Gx \& Hx)$	premiss	
2	(2)	$\forall x (Gx \rightarrow \sim Hx)$	premiss	
3	(3)	Ha	antagande	
4	(4)	Ga	antagande	
2	(5)	$Ga \rightarrow \sim Ha$	2	$\forall E$
2,4	(6)	$\sim Ha$	5,4	$\rightarrow E$
2,3,4	(7)	$\wedge$	6,3	$\sim E$
2,3	(8)	$\sim Ga$	4,7	$\sim I$
2,3	(9)	$\sim Ga \& Ha$	8,3	$\& I$
2,3	(10)	$\exists x (\sim Gx \& Hx)$	9	$\exists I$
1,2,3	(11)	$\wedge$	1,10	$\sim E$
1,2	(12)	$\sim Ha$	3,11	$\sim I$
1,2	(13)	$\forall x \sim Hx$	12	$\forall I$ [a inte i (1),(2)]

Eftersom sentensen på rad 13 bara beror av premisserna på raderna 1 och 2 är beviset klart.