Institutionen för matematik
KTH
Bengt Ek

$A \,\&\, B$

Svar till KS1 i Logik för D1, 2 april 2004

A1) Vi har $p_1 : (A \vee {\sim}B) \to {\sim}(A \to B)$ och $p_2 : {\sim}(({\sim}A \leftrightarrow B) \;\&\; B)$, vilka får sanningsvärdestabeller enligt de två första inramade nedan.
Villkoren $p \vDash p_1$ och ${\sim}p \vDash p_2$ ger att p_1 måste ha värdet 1 då p har värdet 1, dvs p har värdet 0 då p_1 har värdet 0 och pss har ${\sim}p$ värdet 0, dvs p värdet 1, då p_2 har värdet 0. Detta bestämmer tabellen för p, utom att positionen markerad med $*$ är godtycklig, 0 eller 1. (Man kan alltså antingen ha $p \equiv {\sim}(A \leftrightarrow B)$ eller $p \equiv {\sim}(B \to A)$.)

Sanningsvärdestabeller:

A	B	$(A$	$\vee$	${\sim}B)$	$\to$	${\sim}$	$(A\to B)$	${\sim}$	$(($	${\sim}A$	$\leftrightarrow$	$B)$	$\&$	$B)$	p
1	1		1	0	0	0	1	1		0	0		0		0
1	0		1	1	1	1	0	1		0	1		0		$*$
0	1		0	0	1	0	1	0		1	1		1		1
0	0		1	1	0	0	1	1		1	0		0		0

B1) Vi har $p_1 : ({\sim}A \vee B) \to {\sim}(B \to A)$ och $p_2 : {\sim}(A \;\&\; (A \leftrightarrow {\sim}B))$, vilka får sanningsvärdestabeller enligt de två första inramade nedan.
Villkoren $p \vDash p_1$ och ${\sim}p \vDash p_2$ ger att p_1 måste ha värdet 1 då p har värdet 1, dvs p har värdet 0 då p_1 har värdet 0 och pss har ${\sim}p$ värdet 0, dvs p värdet 1, då p_2 har värdet 0. Detta bestämmer tabellen för p, utom att positionen markerad med $*$ är godtycklig, 0 eller 1. (Man kan alltså antingen ha $p \equiv {\sim}(A \leftrightarrow B)$ eller $p \equiv {\sim}(A \to B)$.)

Sanningsvärdestabeller:

A	B	$($	${\sim}A$	$\vee$	$B)$	$\to$	${\sim}$	$(B\to A)$	${\sim}$	$(A$	$\&$	$(A$	$\leftrightarrow$	${\sim}B))$	p
1	1		0	1		0	0	1	1		0		0	0	0
1	0		0	0		1	0	1	0		1		1	1	1
0	1		1	1		1	1	0	1		0		1	0	$*$
0	0		1	1		0	0	1	1		0		0	1	0

A2) Tablå för ${\sim}(A \to B) \vee C \vDash A \,\&\, ({\sim}B \vee C)$:

$\mathbb{T}: {\sim}(A\to B) \vee C \quad \surd_1$
$\mathbb{F}: A \,\&\, ({\sim}B \vee C) \quad \surd_4$

Vänster gren:
1 $\mathbb{T}: {\sim}(A\to B) \quad \surd_2$
2 $\mathbb{F}: A\to B \quad \surd_3$
3 $\mathbb{T}: A$
3 $\mathbb{F}: B$

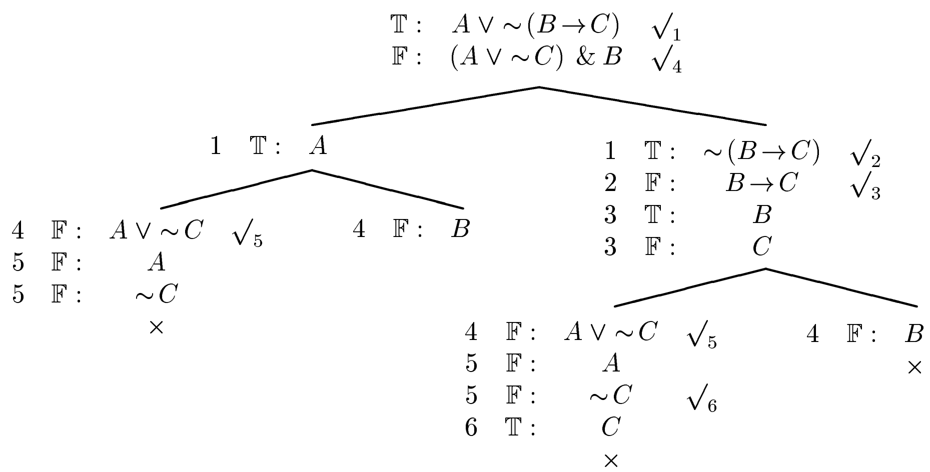
- 4 $\mathbb{F}: A$
  $\times$
- 4 $\mathbb{F}: {\sim}B \vee C \quad \surd_5$
  5 $\mathbb{F}: {\sim}B \quad \surd_6$
  5 $\mathbb{F}: C$
  6 $\mathbb{T}: B$
  $\times$

Höger gren:
1 $\mathbb{T}: C$

- 4 $\mathbb{F}: A$
- 4 $\mathbb{F}: {\sim}B \vee C \quad \surd_5$
  5 $\mathbb{F}: {\sim}B$
  5 $\mathbb{F}: C$
  $\times$

Tablån sluter sig inte, så slutledningen är **inte giltig**, vi har $\nvDash$. En tolkning som visar det läses av i den öppna vägen: $v(A) = 0, v(C) = 1, v(B)$ godtycklig.

B2) Tablå för $A \vee \sim(B \rightarrow C) \;\vDash\; (A \vee \sim C) \;\&\; B$:



Tablån sluter sig inte, så slutledningen är **inte giltig**, vi har $\nvDash$. En tolkning som visar det läses av i den öppna vägen: $v(A) = 1, v(B) = 0, v(C)$ godtycklig.

A3) Vi skall visa att $(A \;\&\; B) \rightarrow C,\; \sim(A \rightarrow C) \;\vdash\; \sim B$.
Idé: Antag B (för att använda $\sim$I) och visa $A \rightarrow C$ genom att använda $\rightarrow$I, dvs antag A och visa C.

1	(1)	$(A \;\&\; B) \rightarrow C$	premiss	
2	(2)	$\sim(A \rightarrow C)$	premiss	
3	(3)	B	antagande	
4	(4)	A	antagande	
3,4	(5)	$A \;\&\; B$	4,3	&I
1,3,4	(6)	C	1,5	$\rightarrow$E
1,3	(7)	$A \rightarrow C$	4,6	$\rightarrow$I
1,2,3	(8)	$\curlywedge$	2,7	$\sim$E
1,2	(9)	$\sim B$	3,8	$\sim$I

Eftersom den önskade sentensen på rad 9 bara beror av premisserna på raderna 1 och 2 är beviset klart.

B3) Vi skall visa att $\sim(A \rightarrow B),\; (A \;\&\; C) \rightarrow B \;\vdash\; \sim C$.
Idé: Antag C (för att använda $\sim$I) och visa $A \rightarrow B$ genom att använda $\rightarrow$I, dvs antag A och visa B.

1	(1)	$\sim(A \rightarrow B)$	premiss	
2	(2)	$(A \;\&\; C) \rightarrow B$	premiss	
3	(3)	C	antagande	
4	(4)	A	antagande	
3,4	(5)	$A \;\&\; C$	4,3	&I
2,3,4	(6)	B	2,5	$\rightarrow$E
2,3	(7)	$A \rightarrow B$	4,6	$\rightarrow$I
1,2,3	(8)	$\curlywedge$	1,7	$\sim$E
1,2	(9)	$\sim C$	3,8	$\sim$I

Eftersom den önskade sentensen på rad 9 bara beror av premisserna på raderna 1 och 2 är beviset klart.