

Matematik, KTH

Bengt Ek

december 2017

MATERIAL TILL KURSEN
SF1679, DISKRET MATEMATIK:

Om ordinaltal och kardinaltal

(Ännu ofullständig version)

Mängdteorin kan ses som grunden för all matematik. Här skall vi bland annat se hur egenskaperna för de naturliga talen kan uttryckas med hjälp av mängder, dvs genom att definiera talen till att **vara** vissa mängder och härleda talens egenskaper ur allmänna egenskaper för mängder. Detta leder oss naturligen till två olika sätt att generalisera de naturliga talen till ”oändliga tal”, ordinaltal och kardinaltal (*eng.* ordinals, cardinals).

1. Om ordinaltal

1.1 Definition, viktiga egenskaper

Då vi skall definiera det naturliga talet n till att vara en mängd, verkar det rimligt att välja en mängd med n element. Det är inte självklart **vilka** element man skall ta, men detta räcker för att bestämma hur talet 0 skall definieras. Vi låter $0 = \emptyset$, den enda mängden med 0 element.

För att kunna definiera talen rekursivt, dvs varje tal med hjälp av de föregående, tar vi $1 = \{0\} = \{\emptyset\}$. På samma sätt låter vi $2 = \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ och allmänt

$$n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}.$$

Med denna definition uttrycker axiomet om oändlighet bland Zermelo-Fraenkels axiom att det finns en mängd som innehåller alla naturliga tal.

Vi får efterföljarfunktionen

$$S(n) = n + 1 = n \cup \{n\} = \cup\{n, \{n\}\}$$

och ordningen mellan naturliga tal är lätt att beskriva:

$$m < n \Leftrightarrow m \subset n \Leftrightarrow m \in n.$$

I allmänhet är det ju mycket viktigt att skilja mellan $a \subset b$ (alla a :s element är också element i b) och $a \in b$ (a är ett element i b), men för de naturliga talen (och övriga ordinaltal) sammanfaller dessa begrepp.

Med ovanstående definition är det naturligt att uppfatta $\omega = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ som ett nytt tal som kommer efter alla de naturliga talen, ett "oändligt tal". Efter ω kommer då ännu ett, större, oändligt tal,

$$S(\omega) = \omega + 1 = \omega \cup \{\omega\} = \{0, 1, 2, 3, \dots, \omega\}.$$

På samma sätt fortsätter det med större och större "oändligheter":

$$\begin{aligned} \omega + 2 &= S(\omega + 1) = \{0, 1, 2, \dots, \omega, \omega + 1\} \\ &\vdots \\ \omega + \omega &= \omega \cdot 2 = \{0, 1, 2, \dots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \dots\} \\ \omega \cdot 2 + 1 &= S(\omega \cdot 2) = \{0, 1, 2, \dots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \dots, \omega \cdot 2\} \\ &\vdots \\ \omega \cdot 3 &= \{0, 1, 2, \dots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \dots, \omega \cdot 2, \omega \cdot 2 + 1, \omega \cdot 2 + 2, \dots\} \\ &\vdots \\ \omega \cdot \omega &= \omega^2 = \{\omega \cdot m + n \mid m, n \in \omega\} \\ \omega^2 + 1 &= S(\omega^2) \\ &\vdots \\ \omega^2 + \omega & \\ &\vdots \\ \omega^2 \cdot 2 & \\ &\vdots \\ \omega^2 \cdot \omega &= \omega^3 = \{\omega^2 \cdot m + \omega \cdot n + p \mid m, n, p \in \omega\} \\ &\vdots \\ \omega^\omega &= \{\omega^k \cdot n_k + \omega^{k-1} \cdot n_{k-1} + \dots + \omega \cdot n_1 + n_0 \mid k, n_k, \dots, n_0 \in \omega\} \\ \omega^\omega + 1 &= S(\omega^\omega) \\ &\vdots \\ \omega^{\omega^\omega} & \\ &\vdots \\ \varepsilon_0 &= \omega^{\omega^{\omega^{\dots}}} = \omega^{\varepsilon_0} \quad (!) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Här är $\omega, \omega \cdot 2, \omega \cdot 3, \dots, \omega^2, \omega^2 + \omega, \dots$ själva inte efterföljare till några "tal" (det handlar alltså **inte** om elementen i en icke-standardmodell för Peanos axiom, som medför att alla element utom 0 är efterföljare).

Vi ger nu en formell definition av ordinaltal och skall visa att de så införda talen har önskade egenskaper.

Definition 1.1 (transitiv mängd):

En mängd z är **transitiv** om för varje element y i z är y en delmängd till z ,

$$\forall y (y \in z \rightarrow y \subseteq z),$$

eller, ekvivalent,

$$\forall x \forall y ((x \in y \wedge y \in z) \rightarrow x \in z).$$

($\in$ behöver inte vara transitiv på z , men transitivitetsvillkoret uppfylls med z som "tredje element".)

Definition 1.2 (ordinaltal):

α är ett **ordinaltal** om α är en transitiv mängd och $\in$ en välordning på α .

Minns att en välordning är detsamma som en välgrundad (strikt) totalordning. På ordinaltal är $\in$ alltså alltid en irreflexiv och transitiv relation som uppfyller trikotomi, dvs $x, y \in \alpha \Rightarrow x \in y, x = y$ eller $y \in x$.

Exempel:

$\alpha = \{0, 1, 2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ är transitiv och välordnad av $\in$, så ett ordinaltal ($\alpha = 3$, som ovan),

$b = \{0, 1, 3\}$ är välordnad av $\in$, inte en transitiv mängd ($2 \in 3, 3 \in b, 2 \notin b$),

$c = \{0, 1, \{1\}\}$ är en transitiv mängd, inte välordnad av $\in$ ($0 \in 1, 1 \in \{1\}, 0 \notin \{1\}$).

Beteckning: $\mathcal{O}$ består av alla ordinaltal, så

$\alpha \in \mathcal{O}$ betyder att α är ett ordinaltal,

$X \subseteq \mathcal{O}$ betyder att alla element i mängden X är ordinaltal.

Sats 1.1: $\alpha \in \mathcal{O} \Rightarrow \alpha \notin \alpha$.

Ty: Om $\alpha \in \alpha$ är $\in$ inte irreflexiv på α . □

Sats 1.2: $\alpha \in \mathcal{O} \Rightarrow S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\} \in \mathcal{O}$.

Ty: $y \in S(\alpha) \Rightarrow$ en av $\begin{cases} y \in \alpha \xRightarrow{\alpha \in \mathcal{O}} y \subseteq \alpha \subseteq S(\alpha), \\ y = \alpha \Rightarrow y \subseteq S(\alpha), \end{cases}$ så $S(\alpha)$ är transitiv.

$\in$ ordnar $S(\alpha)$ enligt "först α 's element (välordnade), sedan α (som element)", vilket blir en välordning. □

Sats 1.3: $\alpha, \beta \in \mathcal{O} \Rightarrow \alpha \cap \beta \in \mathcal{O}$.

Ty: $x \in \alpha \cap \beta \Rightarrow x \in \alpha, \beta \xRightarrow{\alpha, \beta \in \mathcal{O}} x \subseteq \alpha, \beta \Rightarrow x \subseteq \alpha \cap \beta$, så $\alpha \cap \beta$ är transitiv. $\alpha \cap \beta \subseteq \alpha$ och en delmängd till en välordnad mängd är välordnad. □

Sats 1.4: $\mathcal{O}$ är transitiv, dvs $x \in \alpha \in \mathcal{O} \Rightarrow x \in \mathcal{O}$.

Ty: Om $\alpha \in \mathcal{O}$: $z \in y \in x \in \alpha \xRightarrow{\alpha \in \mathcal{O}} z \in y \in \alpha \xRightarrow{\alpha \in \mathcal{O}} z \in \alpha$, så $z \in x$ ($\in$ transitiv i α) och x transitiv.

Om $\alpha \in \mathcal{O}$: $x \in \alpha \Rightarrow x \subseteq \alpha$, så x är välordnad av $\in$. □

Alla element i ordinaltal är alltså ordinaltal.

Sats 1.5: $\alpha, \beta \in \mathcal{O} \Rightarrow (\alpha \subset \beta \Rightarrow \alpha \in \beta)$.

Ty: Om $\alpha, \beta \in \mathcal{O}$ och $\alpha \subset \beta$, låt ξ vara $(\in)$ -minst i $\beta \setminus \alpha$. Vi visar $\alpha = \xi \in \beta$.

Om $\gamma \in \alpha$: $\gamma, \xi \in \beta$ och $\xi \neq \gamma$ ($\xi \notin \alpha$), $\xi \notin \gamma$ ($\xi \in \gamma \in \alpha \Rightarrow \xi \in \alpha$),

så $\gamma \in \xi$ ($\in$ totalordnar β). Alltså $\alpha \subseteq \xi$.

Om $\delta \in \xi$: $\delta \in \xi \in \beta$ och $\delta \in \beta$, så $\delta \in \alpha$ (ξ minst i $\beta \setminus \alpha$). Alltså $\xi \subseteq \alpha$. □

Sats 1.6: $\mathcal{O}$ är $\in$ -välordnad.

Ty: Vi skall visa

- $\in$ transitiv på $\mathcal{O}$: $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{O}, \alpha \in \beta \in \gamma \Rightarrow \alpha \in \gamma$ (γ en transitiv mängd),
- $\in$ irreflexiv på $\mathcal{O}$: $\alpha \notin \alpha$ för $\alpha \in \mathcal{O}$ (sats 1.1),
- $\in$ -trikotomi: för $\alpha, \beta \in \mathcal{O}$, låt $\delta = \alpha \cap \beta$. Då $\delta \in \mathcal{O}$ (sats 1.3), $\delta \subseteq \alpha, \beta$, så (sats 1.5) ($\delta \in \alpha$ eller $\delta = \alpha$) och ($\delta \in \beta$ eller $\delta = \beta$).
 $\delta \in \alpha, \beta$ gäve $\delta \in \alpha \cap \beta = \delta$, motsägelse (sats 1.1), så $\delta = \alpha$ eller $\delta = \beta$.
 $\alpha \subseteq \beta$ ger $\alpha = \beta$ eller $\alpha \in \beta$ (sats 1.5), $\beta \subseteq \alpha$ ger $\beta = \alpha$ eller $\beta \in \alpha$.
- $\in$ välordnar $\mathcal{O}$: låt $\emptyset \neq X \subseteq \mathcal{O}$. Då har X ett minsta element, ty tag $\alpha \in X$. Om α inte är minst i X , är $\alpha \cap X = \{\beta \in X \mid \beta \in \alpha\} \neq \emptyset$ och har ett minsta element (α välordnad av $\in$), också minst i X . □

Sats 1.7 (Burali-Fortis paradox): $\mathcal{O}$ är **inte** en mängd.

Ty: Annars skulle $\mathcal{O} \in \mathcal{O}$ (definition 1.2, sats 1.4, sats 1.6), motsägelse (sats 1.1). $\square$

Sats 1.8: Om X är en mängd, $\emptyset \neq X \subset \mathcal{O}$, så $\cap X, \cup X \in \mathcal{O}$.

Ty: $\cap X$ är X :s minsta element (sats 1.6 och för $\alpha, \beta \in \mathcal{O}$: $\alpha \in \beta \Rightarrow \alpha \subseteq \beta$ (β transitiv)), $y \in z \in \cup X \Rightarrow y \in z \in \alpha$ för ett $\alpha \in X$, så $y \in \alpha$ (α transitiv) och $y \in \cup X$. $\cup X$ är alltså transitiv. Den är välordnad, $\cap X \in \mathcal{O}$. $\square$

$\cup X$ är $\sup X$, det minsta $\alpha \in \mathcal{O}$ med $\beta \in \alpha$ eller $\beta = \alpha$ ($\Leftrightarrow \alpha \notin \beta$), alla $\beta \in X$.

Följande sats har vi sett förr, som exempel på induktion i välordnade mängder.

Sats 1.9: Om $\alpha, \beta \in \mathcal{O}$ och $f: (\alpha, \in) \rightarrow (\beta, \in)$ är en homomorfi

(dvs $\in$ -ordningsbevarande), gäller $f(\gamma) = \gamma$ eller $\gamma \in f(\gamma)$ för alla $\gamma \in \alpha$.

Ty: Annars skulle det finnas ett **minsta** $\xi \in \alpha$ med $f(\xi) \in \xi$, så $f(f(\xi)) \in f(\xi)$, motsägelse mot att ξ var minst. $\square$

Sats 1.10: Om $\alpha, \beta \in \mathcal{O}$ och $f: (\alpha, \in) \xrightarrow{\sim} (\beta, \in)$ är en isomorfi är $f = id_\alpha$ och $\alpha = \beta$.

Ty: Om $\gamma \in \alpha$ och $f(\gamma) = \delta$ är (sats 1.9) $\delta = \gamma$ eller $\gamma \in \delta$, men f^{-1} är också en homomorfi och $f^{-1}(\delta) = \gamma$, så $\gamma = \delta$ eller $\delta \in \gamma$. Så $\gamma = \delta$ (sats 1.1, sats 1.6). $\square$

Sats 1.11: Om A välordnas av $\mathcal{R}$ finns entydigt $f: (A, \mathcal{R}) \xrightarrow{\sim} (\alpha, \in)$, $\alpha \in \mathcal{O}$.

Ty: f definieras (rekursivt) av $f(a) = \{f(x) \mid x \mathcal{R} a\}$, $\alpha = \{f(x) \mid x \in A\}$, så f är surjektiv och för $a, b \in A$ gäller $a \mathcal{R} b \Leftrightarrow f(a) \in f(b)$ (definitionen av f), så f är injektiv och α är $\in$ -välordnad och transitiv, så $\alpha \in \mathcal{O}$.

$f: (A, \mathcal{R}) \xrightarrow{\sim} (\alpha, \in)$ och $g: (A, \mathcal{R}) \xrightarrow{\sim} (\beta, \in)$ ger $gf^{-1}: (\alpha, \in) \xrightarrow{\sim} (\beta, \in)$, så $\alpha = \beta$ och $gf^{-1} = id_\alpha$ (sats 1.10), dvs $f = g$. $\square$

Satsen visar vad ordinaltalen "är till för", de är representanter för isomorfiklasserna av välordnade mängder, varje välordnad mängd är isomorf med precis ett ($\in$ -ordnat) ordinaltal.

Man kan skilja på **tre typer** av ordinaltal:

- $\alpha = 0$,
- **efterföljare** (eng. successor ordinals), $\alpha = S(\beta)$ för något $\beta \in \mathcal{O}$,
- **gränsordinaltal** (eng. limit ordinals), alla andra $\alpha \in \mathcal{O}$.

Exempel på efterföljare är alla tal i $\mathbb{Z}_+$, $\omega + 1 = S(\omega)$, $\omega^2 + \omega + 5 = S(\omega^2 + \omega + 4)$, exempel på gränsordinaltal är $\omega, \omega \cdot 2, \omega^\omega$.

Allmänt är $\alpha \in \mathcal{O}$ en efterföljare omm α har ett största element och ett gränsordinaltal omm $\alpha \neq 0$ och $\alpha = \sup \alpha (= \cup \alpha)$.

Det är ofta praktiskt (t.ex. vid induktion eller rekursion i $\mathcal{O}$) att behandla ordinaltal av de tre typerna separat, som vi skall se i nästa avsnitt.

1.2 Aritmetik för ordinaltal

Vi definierar nu aritmetiska operationer på $\mathcal{O}$ rekursivt. Definitionerna är förstås valda så att operationerna för ändliga ordinaltal (dvs naturliga tal) sammanfaller med de vanliga (för addition och multiplikation innebär det att vi återfinner några av Peanos axiom i definitionerna av rekursionen). Som vi skall se gäller dock inte alla vanliga räkneregler för oändliga ordinaltal.

Definition 1.3 (addition av ordinaltal):

För alla $\alpha, \beta \in \mathcal{O}$:
$$\begin{cases} \alpha + 0 = \alpha \\ \alpha + \beta = S(\alpha + \gamma), & \text{om } \beta = S(\gamma) \\ \alpha + \beta = \cup\{\alpha + \gamma \mid \gamma \in \beta\}, & \text{om } \beta \text{ är ett gränsordinaltal} \end{cases}$$

Ex. $\alpha + 1 = \alpha + S(0) = S(\alpha + 0) = S(\alpha)$ (bra).

$1 + \omega = \cup\{1 + n \mid n \in \omega\} = \omega \neq \omega + 1$, addition är **inte kommutativ** på $\mathcal{O}$.

Ex. Vi visar med transfinit induktion att $0 + \beta = \beta$, för alla $\beta \in \mathcal{O}$,

ty: Antag att det stämmer, dvs $0 + \gamma = \gamma$, för alla $\gamma \in \beta$.

- Om $\beta = 0$: $0 + \beta = 0 + 0 = 0 = \beta$,
- om $\beta = S(\gamma)$: $0 + \beta = S(0 + \gamma) \stackrel{IA}{=} S(\gamma) = \beta$,
- om $\beta = \cup\beta$: $0 + \beta = \cup\{0 + \gamma \mid \gamma \in \beta\} \stackrel{IA}{=} \cup\beta = \beta$.

Påståendet följer. □

För alla $\alpha, \beta \in \mathcal{O}$ gäller, $\alpha + \beta = \alpha \cup \{\alpha + \gamma \mid \gamma \in \beta\}$, vilket kan tas som en alternativ rekursiv definition av addition i $\mathcal{O}$ (summan av $\alpha, \beta \in \mathcal{O}$ är (ordinaltalet för) välordningen ”först α , sedan β ”).

Fortsättning följer...