

Matematik, KTH

Bengt Ek

december 2017

MATERIAL TILL KURSEN
SF1679, DISKRET MATEMATIK:

Om modeller och teorier

Hittills i kursen har vi studerat flera olika typer av matematiska **strukturer**, bl.a. (partial)ordnade mängder, grupper och grafer, och relationer mellan sådana. **Modellteori** är en del av den matematiska logiken som sysslar med olika strukturer och deras egenskaper.

Dessa sidor skall presentera lite av grunderna för den teorin.

1. Om strukturer

En ordnad mängd, en grupp och en graf ges alla av en mängd (de ordnade elementen, gruppelamenten respektive grafens hörn), med en eller flera relationer ($\preceq$, grannrelationen) eller funktioner ($*$, $^{-1}$) definierade på mängderna. De aktuella relationerna och funktionerna beskrivs av elementen i språket för den aktuella typen av struktur.

Definition 1.1 (språk):

Ett **språk** är en mängd av funktionssymboler och relationssymboler, var och en med sin **ställighet** (eng. arity).

Exempel: $\mathcal{L}_{grp} = \{e, *, ^{-1}\}$, språket för grupper, där e är en 0-ställig funktionssymbol (vanligen kallat en **konstant**), $*$ en 2-ställig (oftast kallat binär) funktionssymbol och $^{-1}$ en 1-ställig (ibland kallat unär) funktionssymbol.

$\mathcal{L}_{isordn} = \{\preceq\}$, $\mathcal{L}_{sordn} = \{<\}$, språken för icke-strikta och strikta (partial)ordnade mängder, där $\preceq$, $<$ är 2-ställiga relationssymboler.

$\mathcal{L}_{graf} = \{R\}$, språket för grafer, där R är en 2-ställig relationssymbol (avsedd att stå för grannrelationen).

$\mathcal{L}_{ring} = \{0, 1, -, +, \cdot\}$, språket för ringar (t.ex. för heltalen), där $0, 1$ är konstanter, $-$ en 1-ställig funktionssymbol (avsedd som invers m.a.p. $+$) och $+, \cdot$ är 2-ställiga funktionssymboler.

Definition 1.2 ($\mathcal{L}$ -struktur):

Låt $\mathcal{L}$ vara ett språk. En $\mathcal{L}$ -struktur $\mathfrak{A}$ är ett par, $\mathfrak{A} = (A, (Z^{\mathfrak{A}})_{Z \in \mathcal{L}})$, där
 A är en icke-tom mängd, $\mathfrak{A}$:s *domän* eller *universum*,
 $Z^{\mathfrak{A}}: A^n \rightarrow A$ om Z är en n -ställig funktionssymbol och
 $Z^{\mathfrak{A}} \subseteq A^n$ om Z är en n -ställig relationssymbol.

(Då $n = 0$ är $A^0 = \{\emptyset\}$. Vi identifierar en 0-ställig funktion $f^{\mathfrak{A}}: A^0 \rightarrow A$ med $f^{\mathfrak{A}}(\emptyset)$, det enda elementet i dess värdemängd, och kallar oftast funktionen en *konstant*. På liknande sätt är en 0-ställig relation $R^{\mathfrak{A}} \subseteq A^0$ antingen $\emptyset = 0$, som vi identifierar med *falskt*, eller $\{\emptyset\} = 1$, *sant*. 0-ställiga relationer kan på så sätt identifieras med satslogiska atomära sentenser.

Om R är en n -ställig relationssymbol, skriver vi oftast $R^{\mathfrak{A}}(a_1 \dots a_n)$ (eller $R^{\mathfrak{A}}a_1 \dots a_n$) i stället för $(a_1, \dots, a_n) \in R^{\mathfrak{A}}$. För många välkända relations- och funktionssymboler skriver vi för att öka läsbarheten "som vanligt", t.ex. $a < b$, $x * y$, z^{-1} (i stället för $<(a, b)$ (eller $(a, b) \in <$), $*(x, y)$, $^{-1}(z)$). Versala bokstäver i antikva betecknar om inte annat sägs domänerna för strukturerna med beteckning motsvarande fraktur, t.ex. har strukturerna $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ domäner A, G, S .)

Exempel: En $\mathcal{L}_{grp}$ -struktur $\mathfrak{A}$ innebär alltså en mängd A med ett element $e^{\mathfrak{A}} \in A$, en binär operation (dvs en 2-ställig funktion) $*^{\mathfrak{A}}$ och en funktion $^{-1\mathfrak{A}}$, men det behöver inte vara en grupp.

Definition 1.3 (homomorfi):

Låt $\mathfrak{A}$ och $\mathfrak{B}$ vara $\mathcal{L}$ -strukturer.

En funktion $h: A \rightarrow B$ kallas en **homomorfi** omm för alla $a_1, \dots, a_n \in A$ och alla n -ställiga funktionssymboler f och relationssymboler R i $\mathcal{L}$:

$$\begin{aligned} h(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n)) &= f^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \dots, h(a_n)) \\ (a_1, \dots, a_n) \in R^{\mathfrak{A}} &\Rightarrow (h(a_1), \dots, h(a_n)) \in R^{\mathfrak{B}} \end{aligned}$$

Att h är en homomorfi från $\mathfrak{A}$ till $\mathfrak{B}$ betecknas

$$h: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}.$$

(Fallet $n = 0$ ger speciellt att om $h: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ så är $h(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$ för alla konstanter $c \in \mathcal{L}$ och att $P^{\mathfrak{A}} \Rightarrow P^{\mathfrak{B}}$ (inte säkert ' $\Leftrightarrow$ ') för alla 0-ställiga relationer (satslogiska atomära sentenser) $P \in \mathcal{L}$.)

Exempel: Om $\mathfrak{Z}$ är heltalen $\mathbb{Z}$ och $\mathfrak{Z}_m$ heltalen modulo m , $\mathbb{Z}_m$, ger den vanliga avbildningen $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_m$ en $\mathcal{L}_{ring}$ -homomorfi.

Om $\mathfrak{A}$ är en graf G och $\mathfrak{B}$ är den fullständiga grafen K_n , motsvarar $\mathcal{L}_{graf}$ -homomorfier $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ precis hörnfärgningar av G med högst n färger.

Definition 1.4 (inbäddning):

Låt $\mathfrak{A}$ och $\mathfrak{B}$ vara $\mathcal{L}$ -strukturer.

En homomorfi $h: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ är en **inbäddning** omm (utöver villkoren för homomorfi)

$$\begin{aligned} h: A &\hookrightarrow B \text{ är en injektion} \\ (a_1, \dots, a_n) \in R^{\mathfrak{A}} &\Leftrightarrow (h(a_1), \dots, h(a_n)) \in R^{\mathfrak{B}} \\ &\text{för alla } n\text{-ställiga relationer } R \in \mathcal{L} \text{ och } (a_1, \dots, a_n) \in A^n \end{aligned}$$

(Observera att det här krävs ' $\Leftrightarrow$ ' för relationerna $R^{\mathfrak{A}}, R^{\mathfrak{B}}$.)

Att h är en inbäddning av $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ betecknas

$$h: \mathfrak{A} \hookrightarrow \mathfrak{B}.$$

Definition 1.5 (delstruktur):

Om $\mathfrak{A}$ och $\mathfrak{B}$ är $\mathcal{L}$ -strukturer, $A \subseteq B$ och inklusionsavbildningen (dvs $f: A \rightarrow B$ med $f(a) = a$ för alla $a \in A$) är en inbäddning, kallas $\mathfrak{A}$ en **delstruktur** till $\mathfrak{B}$ och $\mathfrak{B}$ en **utvidgning** av $\mathfrak{A}$. Detta betecknas

$$\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}.$$

En delstruktur till en grupp är precis detsamma som en delgrupp, medan en delstruktur till en graf är en *inducerad delgraf* (dvs hörn i delgrafen som är grannar i den ursprungliga grafen är också grannar i delgrafen).

Om $\mathfrak{B}$ är en $\mathcal{L}$ -struktur och $\emptyset \neq A \subseteq B$, är A domänen för en (entydig) delstruktur till $\mathfrak{B}$ omm A är sluten under $f^{\mathfrak{B}}$ för alla $f \in \mathcal{L}$. Om speciellt $\mathcal{L}$ inte innehåller några funktionssymboler (inklusive inga konstanter), t.ex. $\mathcal{L}_{ordn}$ och $\mathcal{L}_{graf}$, är varje icke-tom delmängd till B domän för en delstruktur till $\mathfrak{B}$.

Om $\{\mathfrak{A}_i\}_{i \in I}$ är en familj av delstrukturer till $\mathcal{L}$ -strukturen $\mathfrak{B}$, är $\bigcap_{i \in I} A_i$ antingen tom eller domänen för en gemensam delstruktur, $\bigcap_{i \in I} \mathfrak{A}_i$, till alla $\mathfrak{A}_i$:na (och till $\mathfrak{B}$).

Det följer att om $\emptyset \neq S \subseteq B$, finns en minsta delstruktur $\langle S \rangle^{\mathfrak{B}}$ till $\mathfrak{B}$ som innehåller S (skärningen av mängden (icke-tom, ty $\mathfrak{B}$ ingår) av de delstrukturer till $\mathfrak{B}$ vars domäner innehåller S ; S och funktionerna $f^{\mathfrak{B}}$ med $f \in \mathcal{L}$ fungerar som konstruktormängd för $\langle S \rangle^{\mathfrak{B}}$:s domän). Om $\mathcal{L}$ innehåller minst en konstant (0-ställig funktionssymbol) är $\langle \emptyset \rangle^{\mathfrak{B}}$ en minsta delstruktur till $\mathfrak{B}$ (en delstruktur till alla $\mathfrak{B}$:s delstrukturer).

Definition 1.6 (isomorfi):

Låt $\mathfrak{A}$ och $\mathfrak{B}$ vara $\mathcal{L}$ -strukturer.

En inbäddning $h: \mathfrak{A} \hookrightarrow \mathfrak{B}$ är en **isomorfi** omm (utöver villkoren för inbäddning)

$$h: A \hookrightarrow B \text{ är en bijektion}$$

Att h är en isomorfi mellan $\mathfrak{A}$ och $\mathfrak{B}$ betecknas

$$h: \mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B}.$$

$\mathfrak{A}$ och $\mathfrak{B}$ är **isomorfa**, betecknat $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, omm det finns en isomorfi $h: \mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B}$. En **automorfi** är en isomorfi $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{A}$ av $\mathfrak{A}$ med sig själv. Mängden $\text{Aut}(\mathfrak{A})$ av alla automorfier av en struktur $\mathfrak{A}$ är en grupp under sammansättning.

Detta stämmer ju överens med de isomorfier vi sett (för ordnade mängder, grupper och grafer), de kan alla beskrivas som "bijektioner som bevarar funktioner och relationer", och det gäller allmänt att isomorfi är en ekvivalensrelation på $\mathcal{L}$ -strukturer (reflexivitet, symmetri och transitivitet följer av att id_A är en bijektion, att h bijektion $\Rightarrow h^{-1}$ bijektion och att h_1, h_2 bijektioner $\Rightarrow h_2 h_1$ bijektion).

Om $\mathfrak{A}$ är en $\mathcal{L}$ -struktur och $h: A \hookrightarrow B$ en bijektion, kan h användas för att definiera en (entydig) $\mathcal{L}$ -struktur $\mathfrak{B}$, med domän B och $h: \mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B}$.

Så, i $\mathcal{L}$ -strukturer är $\mathcal{L}$:s funktionssymboler och relationssymboler "realiserade" som funktioner och relationer på strukturens domän. Men det behöver inte vara så att strukturerna beskriver det vi avsåg att beskriva med just språket $\mathcal{L}$.

T.ex. är (eller motsvarar) alla grupper $\mathcal{L}_{grp}$ -strukturer, men det är inte så att varje $\mathcal{L}_{grp}$ -struktur $\mathfrak{A}$ beskriver en grupp. Inget hindrar t.ex. att $a *^{\mathfrak{A}} a^{-1\mathfrak{A}} \neq e^{\mathfrak{A}}$ för $a \in A$. Gruppaxiomen ställer krav på egenskaper och samband mellan $e^{\mathfrak{A}}$, $*^{\mathfrak{A}}$ och $^{-1\mathfrak{A}}$.

För att beskriva dessa egenskaper och samband behöver vi ett språk för att uttrycka påståenden om strukturer. Ett sådant språk, första ordningens **predikatlogik** behandlas i nästa avsnitt.

2. Om (första ordningens) predikatlogik

När vi behandlade satslogik och dess språk, lät vi A betyda 'det är lördag' och B betyda 'Lisa läser diskret matte' och skrev det sammansatta påståendet 'om det är lördag, läser Lisa diskret matte' som

$$A \rightarrow B$$

och om vi vill uttrycka att både Lisa och Olle läser diskret matte, kan vi låta D betyda 'Olle läser diskret matte' och skriva $B \wedge D$. Men i så fall missar vi det väsentliga att det är två personer som gör samma sak, i motsats till i fallet $A \wedge B$ ('det är lördag och Lisa läser diskret matte').

Predikatlogiken tillåter att vi inför ett **predikat** (dvs en (enställig) relationssymbol) L , säg, med betydelsen 'läser diskret matte'. Om man också inför **konstanterna** a för Lisa och b för Olle, kan vi uttrycka att båda sköter sina studier som

$$La \wedge Lb$$

och att alla (i någon aktuell domän) läser diskret matte som

$$\forall x Lx,$$

mycket bättre och framför allt, mer lämpat för våra behov i matematiken. Notera hur **kvantifikatorn** $\forall$ och **variabeln** x gör det möjligt att uttrycka sig om element i domänen som vi inte har något namn för.

I predikatlogiken uttrycks (vissa) påståenden om $\mathcal{L}$ -strukturer med "sentenser", strängar av symboler från mängden $\mathcal{L} \cup \{=, \neg, \wedge, \exists, (,), v_0, v_1, \dots\}$, som definieras rekursivt (med konstruktörer). (Den som saknar $\vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ och $\forall$, se nedan.)

Man behöver dels **termer**, som skall beteckna element i domänen, och dels **formler**, som skall uttrycka egenskaper hos dem.

Definition 2.1 (termer):

$\mathcal{L}$ -termer (svarar (då variablerna ges värden) mot element i domänen) definieras rekursivt:

- varje variabel v_i är en $\mathcal{L}$ -term
- om $t_1, \dots, t_n$ är $\mathcal{L}$ -termer och $f \in \mathcal{L}$ en n -ställig funktionssymbol ($n \in \mathbb{N}$) är $f(t_1, \dots, t_n)$ en $\mathcal{L}$ -term (speciellt ($n = 0$) är varje konstant $c \in \mathcal{L}$ en $\mathcal{L}$ -term)

Definition 2.2 (tolkning av termer):

I en struktur $\mathfrak{A}$ och för en **tilldelning** $\vec{b} = (b_0, b_1, \dots)$ av värden $b_i \in A$ till variablerna v_i har $\mathcal{L}$ -termen t **tolkningen** $t^{\mathfrak{A}}[\vec{b}] \in A$, rekursivt definierad:

- $v_i^{\mathfrak{A}}[\vec{b}] = b_i$
- $f(t_1, \dots, t_n)^{\mathfrak{A}}[\vec{b}] = f^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}[\vec{b}], \dots, t_n^{\mathfrak{A}}[\vec{b}])$

(Att detta definierar $t^{\mathfrak{A}}[\vec{b}]$ entydigt, beror på att termerna definieras entydigt rekursivt ovan.)

Sats 2.1:

Om $h: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ med $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ $\mathcal{L}$ -strukturer och t är en $\mathcal{L}$ -term är

$$h(t^{\mathfrak{A}}[\vec{b}]) = t^{\mathfrak{B}}[h(\vec{b})],$$

för varje tilldelning $\vec{b}$ av värden i A . $h(\vec{b}) = (h(b_0), h(b_1), \dots)$.

Ty: Induktion över t 's form (med definitionerna 1.3, 2.1 och 2.2):

- Om t är v_i är $h(t^{\mathfrak{A}}[\vec{b}]) = h(v_i^{\mathfrak{A}}[\vec{b}]) = h(b_i) = v_i^{\mathfrak{B}}[h(\vec{b})] = t^{\mathfrak{B}}[h(\vec{b})]$,
- om t är $f(t_1, \dots, t_n)$ och $h(t_i^{\mathfrak{A}}[\vec{b}]) = t_i^{\mathfrak{B}}[h(\vec{b})]$ för $i = 1, \dots, n$ är
 $h(t^{\mathfrak{A}}[\vec{b}]) = h(f(t_1, \dots, t_n)^{\mathfrak{A}}[\vec{b}]) = h(f^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}[\vec{b}], \dots, t_n^{\mathfrak{A}}[\vec{b}])) =$
 $= f^{\mathfrak{B}}(h(t_1^{\mathfrak{A}}[\vec{b}]), \dots, h(t_n^{\mathfrak{A}}[\vec{b}])) = f^{\mathfrak{B}}(t_1^{\mathfrak{B}}[h(\vec{b})], \dots, t_n^{\mathfrak{B}}[h(\vec{b})]) = t^{\mathfrak{B}}[h(\vec{b})]. \quad \square$

Definition 2.3 (formler):

$\mathcal{L}$ -formler (svarar (då variablerna tilldelas värden) mot påståenden) definieras rekursivt:

- om t_1, t_2 är $\mathcal{L}$ -termer är $t_1 = t_2$ en $\mathcal{L}$ -formel
- om $R \in \mathcal{L}$ är en n -ställig relationssymbol och $t_1, \dots, t_n$ är $\mathcal{L}$ -termer, är $Rt_1 \dots t_n$ en $\mathcal{L}$ -formel
- om ψ är en $\mathcal{L}$ -formel är $\neg\psi$ en $\mathcal{L}$ -formel
- om ψ_1, ψ_2 är $\mathcal{L}$ -formler är $(\psi_1 \wedge \psi_2)$ en $\mathcal{L}$ -formel
- om ψ är en $\mathcal{L}$ -formel och x en av variablerna v_i är $\exists x \psi$ en $\mathcal{L}$ -formel

$\mathcal{L}$ -formler av typerna $t_1 = t_2$ och $Rt_1 \dots t_n$ kallas **atomära** formler.

Vissa symboler betraktas som **förkortningar** (som nästan alltid används):

$$\begin{aligned} (\psi_1 \vee \psi_2) & \text{ står för } \neg(\neg\psi_1 \wedge \neg\psi_2), \\ (\psi_1 \rightarrow \psi_2) & \text{ står för } \neg(\psi_1 \wedge \neg\psi_2), \\ (\psi_1 \leftrightarrow \psi_2) & \text{ står för } (\neg(\psi_1 \wedge \neg\psi_2) \wedge \neg(\neg\psi_1 \wedge \psi_2)), \\ \forall x \psi & \text{ står för } \neg \exists x \neg \psi. \end{aligned}$$

Variabelnamnen $v_0, v_1, \dots$ används nästan bara i definitioner och liknande, i ”praktiken” används oftast $x, y, \dots$

Definition 2.4 (satisfiering):

För en $\mathcal{L}$ -struktur $\mathfrak{A}$, en tilldelning $\vec{b}$ och en $\mathcal{L}$ -formel φ definieras

$$\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{b}],$$

utläst som ” φ är sann i $\mathfrak{A}$ för $\vec{b}$ ”, ” $\vec{b}$ satisfierar φ i $\mathfrak{A}$ ” eller liknande, enligt

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \models t_1 = t_2[\vec{b}] & \Leftrightarrow t_1^{\mathfrak{A}}[\vec{b}] \text{ och } t_2^{\mathfrak{A}}[\vec{b}] \text{ är samma element i } A \\ \mathfrak{A} \models Rt_1 \dots t_n[\vec{b}] & \Leftrightarrow (t_1^{\mathfrak{A}}[\vec{b}], \dots, t_n^{\mathfrak{A}}[\vec{b}]) \in R^{\mathfrak{A}} \\ \mathfrak{A} \models \neg\psi[\vec{b}] & \Leftrightarrow \mathfrak{A} \not\models \psi[\vec{b}] \\ \mathfrak{A} \models (\psi_1 \wedge \psi_2)[\vec{b}] & \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \psi_1[\vec{b}] \text{ och } \mathfrak{A} \models \psi_2[\vec{b}] \\ \mathfrak{A} \models \exists x \psi[\vec{b}] & \Leftrightarrow \text{det finns } a \in A \text{ med } \mathfrak{A} \models \psi[\vec{b}_x^a], \end{aligned}$$

där $\vec{b}_x^a$ är tilldelningen som ger v_i värdet a om $x = v_i$ och värdet b_i annars.

(Att detta definierar $\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{b}]$ entydigt, beror på att formlerna definierats entydigt rekursivt ovan.)

Oftast skriver vi inte $[\vec{b}]$, utan bara $t(a_1, \dots, a_n)$ för $t^{\mathfrak{A}}[\vec{b}]$ och $\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$ för $\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{b}]$ om $\vec{b}$ ger t :s respektive φ :s variabler $x_1, \dots, x_n$ värdena $a_1, \dots, a_n$. (Att de är oberoende av övriga variablers värden visas med induktion över t :s och φ :s former.)

Definition 2.5 (sentenser):

En **$\mathcal{L}$ -sentens** är en $\mathcal{L}$ -formel utan **fria variabler** (dvs inga variabler som behöver tilldelas värden, alla ingående variabler x är *bundna* av ett $\exists x$ (eller ett $\forall x$)).

För en **$\mathcal{L}$ -sentens** φ och en $\mathcal{L}$ -struktur $\mathfrak{A}$ skriver vi

$$\mathfrak{A} \models \varphi$$

i stället för $\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{b}]$, eftersom det är oberoende av $\vec{b}$ (kan som nämnt ovan bevisas med induktion över φ :s form).

3. Om modeller och teorier

Relationen $\mathfrak{A} \models \varphi$ mellan $\mathcal{L}$ -strukturer och $\mathcal{L}$ -formler/ $\mathcal{L}$ -sentenser definierar en "dualitet" mellan mängder av dem, så som uttrycks i följande definitioner.

Definition 3.1 (modeller):

Om $\mathfrak{A}$ är en $\mathcal{L}$ -struktur, φ en $\mathcal{L}$ -sentens och Γ en mängd $\mathcal{L}$ -sentenser:

$\mathfrak{A}$ är en **modell för φ** omm $\mathfrak{A} \models \varphi$.

$\mathfrak{A}$ är en **modell för Γ** , $\mathfrak{A} \models \Gamma$, omm $\mathfrak{A} \models \varphi$ för alla $\varphi \in \Gamma$.

Definition 3.2 (realiserade mängder):

Om $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ (dvs alla φ :s fria variabler finns bland $x_1, \dots, x_n$ och inga två av dem är samma variabel) är en $\mathcal{L}$ -formel och $\mathfrak{A}$ en $\mathcal{L}$ -struktur kallas

$$\varphi(\mathfrak{A}) = \{(a_1, \dots, a_n) \mid \mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_n)\} \subseteq A^n$$

för **mängden som φ realiserar** (lösningsmängden till φ som ekvation).

Definition 3.3 (ekvivalenta formler):

Två $\mathcal{L}$ -formler φ och ψ kallas **ekvivalenta**,

$$\varphi \equiv \psi \text{ omm } \varphi(\mathfrak{A}) = \psi(\mathfrak{A}) \text{ för alla } \mathcal{L}\text{-strukturer } \mathfrak{A}.$$

Definition 3.4 (teori, satisfierbar teori):

En **$\mathcal{L}$ -teori** T är en mängd $\mathcal{L}$ -sentenser.

Teorin T kallas **satisfierbar** omm den har (minst) en modell.

Definition 3.5 (axiom, elementär klass strukturer):

Vi låter $\text{Mod}(T) = \{\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A} \models T\}$, mängden av alla T :s modeller.

T kallas en uppsättning **axiom** för $\text{Mod}(T)$ och en klass $\mathcal{L}$ -strukturer som är $\text{Mod}(T)$ för någon teori T kallas en **elementär klass** av $\mathcal{L}$ -strukturer.

Definition 3.6 (ekvivalenta teorier):

Två $\mathcal{L}$ -teorier S och T är **ekvivalenta**,

$$S \equiv T \text{ omm } \text{Mod}(S) = \text{Mod}(T).$$

Definition 3.7 (en strukturs teori, elementärt ekvivalenta strukturer):

Om $\mathfrak{A}$ är en $\mathcal{L}$ -struktur är $\mathfrak{A}$:s **teori**,

$$\text{Th}(\mathfrak{A}) = \{\varphi \mid \varphi \text{ en } \mathcal{L}\text{-sentens, } \mathfrak{A} \models \varphi\}.$$

Två $\mathcal{L}$ -strukturer $\mathfrak{A}$ och $\mathfrak{B}$ är **elementärt ekvivalenta**,

$$\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B} \text{ omm } \text{Th}(\mathfrak{A}) = \text{Th}(\mathfrak{B}),$$

dvs omm $\mathfrak{A} \models \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi$ för alla $\mathcal{L}$ -sentenser φ .

Sats 3.1:

Isomorfa strukturer är elementärt ekvivalenta,

$$\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B} \Rightarrow \mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$$

(Men **inte säkert** omvänt, som vi kommer att se senare.)

Ty: Låt $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ vara $\mathcal{L}$ -strukturer och $h: \mathfrak{A} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{B}$ en isomorfi.

Vi visar $\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{b}] \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi[h(\vec{b})]$ för alla tilldelningar $\vec{b}$ och alla $\mathcal{L}$ -formler φ , med induktion över φ :s form (enligt definitionen av formler och deras satisfiering).

- $h(t^{\mathfrak{A}}[\vec{b}]) = t^{\mathfrak{B}}[h(\vec{b})]$ för alla termer t , så (h bijektiv) $t_1^{\mathfrak{A}} = t_2^{\mathfrak{A}}[\vec{b}] \Leftrightarrow t_1^{\mathfrak{B}} = t_2^{\mathfrak{B}}[h(\vec{b})]$,
- $h(t_i^{\mathfrak{A}}[\vec{b}]) = t_i^{\mathfrak{B}}[h(\vec{b})]$ för $i = 1, \dots, n$ ger (h isomorfi) $R^{\mathfrak{A}}t_1^{\mathfrak{A}} \dots t_n^{\mathfrak{A}}[\vec{b}] \Leftrightarrow R^{\mathfrak{B}}t_1^{\mathfrak{B}} \dots t_n^{\mathfrak{B}}[h(\vec{b})]$,
- om $\mathfrak{A} \models \psi[\vec{b}] \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \psi[h(\vec{b})]$ så $\mathfrak{A} \models \neg\psi[\vec{b}] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \not\models \psi[\vec{b}] \Leftrightarrow \mathfrak{B} \not\models \psi[h(\vec{b})] \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \neg\psi[h(\vec{b})]$,
- om $\mathfrak{A} \models \psi_i[\vec{b}] \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \psi_i[h(\vec{b})]$ för $i = 1, 2$ så $\mathfrak{A} \models (\psi_1 \wedge \psi_2)[\vec{b}] \Leftrightarrow (\mathfrak{A} \models \psi_1[\vec{b}] \text{ och } \mathfrak{A} \models \psi_2[\vec{b}]) \Leftrightarrow (\mathfrak{B} \models \psi_1[h(\vec{b})] \text{ och } \mathfrak{B} \models \psi_2[h(\vec{b})]) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models (\psi_1 \wedge \psi_2)[h(\vec{b})]$,
- om $\mathfrak{A} \models \psi[\vec{b} \frac{a}{x}] \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \psi[h(\vec{b}) \frac{h(a)}{x}]$ så $\mathfrak{A} \models \exists x \psi[\vec{b}] \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \exists x \psi[h(\vec{b})]$. $\square$

Vi definierar nu en särskild typ av inbäddningar och delstrukturer.

Definition 3.8 (elementära inbäddningar):

Låt $\mathfrak{A}$ och $\mathfrak{B}$ vara $\mathcal{L}$ -strukturer.

En funktion $h: A \rightarrow B$ kallas **elementär** omm

$$\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{b}] \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi[h(\vec{b})],$$

för alla $\mathcal{L}$ -formler φ och tilldelningar $\vec{b}$.

(Speciellt gäller det för alla φ utan kvantifikatorer, så h är en inbäddning.)

Att h är en elementär inbäddning av $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ betecknas

$$h: \mathfrak{A} \xrightarrow{e} \mathfrak{B}.$$

Definition 3.9 (elementär delstruktur):

Om $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ och inklusionsavbildningen är elementär, kallas $\mathfrak{A}$ en **elementär delstruktur** till $\mathfrak{B}$, betecknat

$$\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}.$$

Det är **inte** (som man skulle kunna tro) så att $(\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B} \text{ och } \mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}) \Rightarrow \mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$, utan elementär inbäddning är ett starkare krav (men $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B} \Rightarrow (\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B} \text{ och } \mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B})$).

T.ex. är $(\mathbb{Z}_+, <) \subseteq (\mathbb{N}, <)$ och $(\mathbb{Z}_+, <) \cong (\mathbb{N}, <)$, så $(\mathbb{Z}_+, <) \equiv (\mathbb{N}, <)$, men $(\mathbb{Z}_+, <) \not\preceq (\mathbb{N}, <)$ (ty $(\mathbb{Z}_+, <) \models \exists x x < 1$, men $(\mathbb{N}, <) \models \exists x x < 1$ ($\exists x x < 1$ står för $\exists x x < y[\vec{b}_y^1]$)).

Exempel: $(\mathbb{Q}, <) \preceq (\mathbb{R}, <)$ (men det visar vi inte här).

Eftersom $|\mathbb{Q}| < |\mathbb{R}|$ finns ingen bijektion $h: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$, så $(\mathbb{Q}, <) \not\equiv (\mathbb{R}, <)$, trots att $(\mathbb{Q}, <) \equiv (\mathbb{R}, <)$.

Däremot är det sant att alla uppräknliga, linjärt (dvs $\forall x \forall y (x < y \vee x = y \vee y < x)$ uppfyllt), tätt (dvs $\forall x \forall y \exists z (x < z \wedge z < y)$ uppfyllt) ordnade mängder utan största eller minsta element (dvs $\forall x \exists y x < y$ och $\forall x \exists y y < x$ uppfyllda) är isomorfa.

4. Några matematiskt relevanta axiomsystem

Följande system av axiom definierar respektive klasser av strukturer, som alltså alla är **elementära klasser**.

AXIOM FÖR (PARTIAL)ORDNINGAR

1. Icke-strikta ordningar

Språk $\mathcal{L}_{\text{isordn}} = \{\preceq\}$

$\preceq$ en binär relationssymbol

Axiom:

- | | | |
|-------------|--|---------------|
| $\preceq 1$ | $\forall x x \preceq x$ | reflexivitet |
| $\preceq 2$ | $\forall x \forall y ((x \preceq y \wedge y \preceq x) \rightarrow x = y)$ | antisymmetri |
| $\preceq 3$ | $\forall x \forall y \forall z ((x \preceq y \wedge y \preceq z) \rightarrow x \preceq z)$ | transitivitet |

2. Strikta ordningar

Språk $\mathcal{L}_{\text{sordn}} = \{\prec\}$

$\prec$ en binär relationssymbol

Axiom:

- | | | |
|-----------|--|----------------|
| $\prec 1$ | $\forall x \neg(x \prec x)$ | irreflexivitet |
| $\prec 2$ | $\forall x \forall y \forall z ((x \prec y \wedge y \prec z) \rightarrow x \prec z)$ | transitivitet |

Vad gäller grupper är det här naturligt att använda ett språk som innehåller en konstantsymbol e för identitets-elementet, i stället för att låta det ingå i axiomen att ett sådant element finns (vilket också vore möjligt).

AXIOM FÖR GRUPPER

Språk $\mathcal{L}_{\text{grp}} = \{e, ^{-1}, *\}$

e en konstant (en 0-ställig funktionssymbol)

$^{-1}$ en enställig (unär) funktionssymbol (vi skriver x^{-1} i stället för $^{-1}(x)$)

$*$ en binär funktionssymbol (vi skriver $x * y$ i stället för $*(x, y)$)

Axiom:

G1 $\forall x \forall y \forall z (x * y) * z = x * (y * z)$ $*$ är associativ

G2 $\forall x (x * e = x \wedge e * x = x)$ e är ett identitets-element

G3 $\forall x (x * x^{-1} = e \wedge x^{-1} * x = e)$ $^{-1}$ ger en invers

AXIOM FÖR (ENKLA, ORIKTADE) GRAFER

Språk $\mathcal{L}_{\text{graf}} = \{R\}$

R en binär relationssymbol, avsedd att beteckna grannrelationen mellan hörn

Axiom:

Graf1 $\forall x \neg Rxx$ R är irreflexiv, inga öglor

Graf2 $\forall x (Rxy \rightarrow Ryx)$ R är symmetrisk, kanterna är oriktade

Från Peanos axiom för de naturliga talen följer de flesta egenskaper för $\mathbb{N}$ (den *avsedda tolkningen*), men inte alla. Det finns nämligen modeller för axiomen som inte är ekvivalenta (och därmed inte isomorfa) med $\mathbb{N}$. Det följer av Gödels (första) ofullständighetssats, som vi skall säga mer om senare.

PEANOS AXIOM för $\mathbb{N}$ (och en del andra strukturer)

Språk $\mathcal{L}_{\text{Peano}} = \{0, S, +, *\}$ (den avsedda tolkningen inom $[\]$):

0 en konstant [talet 0]

S en unär funktionssymbol [efterföljarfunktionen, ger nästa tal]

$+, *$ binära funktionssymboler [addition och multiplikation]

(vi skriver t.ex. $x + y$ och $x * y$ i stället för $+(x, y)$ och $*(x, y)$.)

Axiom:

P1 $\forall x \forall y (S(x) = S(y) \rightarrow x = y)$ S är injektiv

P2 $\forall x S(x) \neq 0$ 0 är inte en efterföljare

P3 $\forall x x + 0 = x$ bas i definitionen av $+$

P4 $\forall x \forall y x + S(y) = S(x + y)$ steg i definitionen av $+$

P5 $\forall x x * 0 = 0$ bas i definitionen av $*$

P6 $\forall x \forall y x * S(y) = (x * y) + x$ steg i definitionen av $*$

P7 $\forall z_1 \dots \forall z_n ((\phi 0 \wedge \forall x (\phi x \rightarrow \phi S(x))) \rightarrow \forall x \phi x)$ induktionsaxiom

I P7 är ϕx en godtycklig $\mathcal{L}_{\text{Peano}}$ -formel med alla fria variabler bland $x, z_1, \dots, z_n$.

Så P7 är egentligen ett oändligt antal axiom, ett s.k. **axiomschema**.

Med P7 (oftast med $n = 0$) kan vi göra **induktionsbevis** i modeller av axiomen, som $\mathbb{N}$.

Russells paradox (oberoende upptäckt av Zermelo) visar att antagandet att varje $\mathcal{L}$ -formel $\varphi(x)$ (med $\mathcal{L} = \{\in\}$) definierar en mängd $\{x \mid \varphi(x)\}$ leder till motsägelse:

$$A = \{x \mid x \notin x\} \Rightarrow (A \in A \Leftrightarrow A \notin A).$$

Antagandet ersätts av separationsaxiomet, 3. nedan.

ZERMELO-FRAENKELS AXIOM för mängder

Språk $\mathcal{L}_{\text{mgd}} = \{\in\}$

$\in$ en binär relationssymbol

(Trots att den avsedda tolkningen har mängder som element, kan vi inte vara säkra på att alla "verkliga" mängder av element i en modell motsvarar element i modellen.)

1. Extensionalitet

Om x och y har samma element, så är $x = y$,

$$\forall x \forall y (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y)$$

2. Par

För alla x och y finns en mängd $\{x, y\}$ som innehåller precis x och y ,

$$\forall x \forall y \exists z \forall u (u \in z \leftrightarrow (u = x \vee u = y))$$

3. Separation

Om P är en egenskap (med en parameter q), så finns för varje x och q en mängd $y = \{z \in x \mid P(z, q)\}$ av alla $z \in x$ med egenskapen P ,

$$\forall x \forall q \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow (z \in x \wedge \phi(z, q)))$$

($\phi(z, q)$ en godtycklig $\mathcal{L}_{\text{mgd}}$ -formel (som definierar P))

4. Union

För varje mängd x finns en mängd $y = \bigcup x$, unionen av elementen i x ,

$$\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow \exists u (z \in u \wedge u \in x))$$

5. Potensmängd

För varje mängd x finns en mängd $y = \mathcal{P}(x)$, mängden av alla delmängder till x ,

$$\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow \forall u (u \in z \rightarrow u \in x))$$

6. Oändlighet

Det finns en oändlig mängd (en mängd som innehåller $\mathbb{N}$),

$$\exists x (\emptyset \in x \wedge \forall y (y \in x \rightarrow \bigcup \{y, \{y\}\} \in x))$$

($\emptyset$ existerar enligt 3. med $z \neq z$ som $\phi(z)$. $\{y\} = \{y, y\}$ existerar enligt 2.)

7. Substitution

Om f är en funktion, så finns för varje mängd x en mängd $y = \{f(y) \mid y \in x\}$

$$\forall p (\forall x \forall y \forall z ((\varphi(x, y, p) \wedge \varphi(x, z, p)) \rightarrow y = z) \rightarrow$$

$$\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow \exists u (u \in x \wedge \varphi(u, z, p))))$$

(p en parameter, $\mathcal{L}_{\text{mgd}}$ -formeln φ definierar f)

8. Regularitet (välgrundning)

$\in$ är en välgrundad relation,

$$\forall x (x \neq \emptyset \rightarrow \exists y (y \in x \wedge \neg \exists z (z \in x \wedge z \in y)))$$

9. Urvalsaxiomet

Om $\emptyset \notin x$ finns en funktion f på x som väljer ett element från varje $y \in x$,

$$\forall x (\neg \emptyset \in x \rightarrow \exists f (f \text{ funk}(f) \wedge \forall y (y \in x \rightarrow f(y) \in y)))$$

($\text{funk}(f)$ är en $\mathcal{L}_{\text{mgd}}$ -formel som säger att f är en funktion, dvs en mängd ordnade par med $\forall x \forall y \forall z ((\langle x, y \rangle \in f \wedge \langle x, z \rangle \in f) \rightarrow y = z)$. $f(z)$ ges av $\langle z, f(z) \rangle \in f$.

$\langle a, b \rangle$ är $\{\{a\}, \{a, b\}\}$.)

5. Om ultrafilter och ultraprodukter

Vi har tidigare sett att om H och K är delgrupper till en grupp G , så är $H \cap K$ också det. Mer generellt är det ju så, att om $\{\mathfrak{A}_\iota\}_{\iota \in I}$ är delstrukturer till $\mathcal{L}$ -strukturen $\mathfrak{A}$, så är $\bigcap_{\iota \in I} \mathfrak{A}_\iota$ också det, förutsatt att $\bigcap_{\iota \in I} A_\iota \neq \emptyset$ (t.ex. om $\mathcal{L}$ innehåller minst en konstant).

Vi frågar oss nu, är det lika enkelt att generalisera den direkta produkten av två grupper till fler än två och helst mer allmänna strukturer?

Om $\{\mathfrak{A}_\iota\}_{\iota \in I}$ är (kanske oändligt många) $\mathcal{L}$ -strukturer, skulle vi vilja införa en produktstruktur $\mathfrak{A} = \prod_{\iota \in I} \mathfrak{A}_\iota$ med $A = \prod_{\iota \in I} A_\iota = \{(a_\iota)_{\iota \in I} \mid a_\iota \in A_\iota, \text{ alla } \iota \in I\}$ (i fortsättningen skriver vi (a_ι) för $(a_\iota)_{\iota \in I}$). Då kan vi om $f \in \mathcal{L}$ är en n -ställig funktionsymbol låta $f^{\mathfrak{A}}: A^n \rightarrow A$ ges av

$$f^{\mathfrak{A}}((a_\iota^1), \dots, (a_\iota^n)) = (f^{\mathfrak{A}_\iota}(a_\iota^1, \dots, a_\iota^n)) \in A$$

("komponentvis operation", som t.ex. produkt och invers i direkta produkter av grupper). Men det är inte lika klart hur man skall behandla relationssymboler $R \in \mathcal{L}$. Om $R^{\mathfrak{A}_\iota} a_\iota^1 \dots a_\iota^n$ är sann för vissa ι och falsk för andra, vad skall $R^{\mathfrak{A}}(a_\iota^1) \dots (a_\iota^n)$ vara? En möjlighet är att låta något ι ha "företräde", men det finns en mer symmetrisk metod (lite som majoritetsbeslut) att definiera en produktstruktur av $\mathfrak{A}_\iota$:na, också då $\mathcal{L}$ innehåller relationssymboler.

Definition 5.1 (filter):

Ett **filter** $\mathcal{F}$ på en mängd I är ett $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(I)$ (en mängd delmängder till I) med

- $\emptyset \notin \mathcal{F}$, $I \in \mathcal{F}$,
- $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$,
- $(A \in \mathcal{F} \text{ och } A \subseteq C \subseteq I) \Rightarrow C \in \mathcal{F}$.

Exempel:

$\mathcal{F} = \{A \subseteq I \mid B \subseteq A\}$ är ett *principalt* filter på I för varje $B \subseteq I$, $B \neq \emptyset$,

Om I är oändlig, är $\mathcal{F} = \{A \subseteq I \mid I \setminus A \text{ ändlig}\}$ ett filter (*fréchetfiltret* på I).

Definition 5.2 (ändligskärningsegenskapen):

$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(I)$ har **ändligskärningsegenskapen, äse** (eng. finite intersection property, fip) omm $S_1 \cap \dots \cap S_k \neq \emptyset$ för alla $S_1, \dots, S_k \in \mathcal{S}$, $k \in \mathbb{N}$.

Sats 5.1:

Om $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(I)$ finns ett filter $\mathcal{F}$ med $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(I)$ omm $\mathcal{S}$ har äse.

Ty: $\Rightarrow$: Om $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{F}$ och $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{S}$ är $A_1 \cap \dots \cap A_k \neq \emptyset$ ($\text{ty} \in \mathcal{F}$),

$\Leftarrow$: Om $\mathcal{S}$ har äse, är $\mathcal{F} = \{A \subseteq I \mid S_1 \cap \dots \cap S_k \subseteq A, \text{ några } S_1, \dots, S_k \in \mathcal{S}\}$ ett filter (verifiera egenskaperna i definition 5.1). $\square$

Sats 5.2:

Om $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(I)$ är ett filter och $B \subseteq I$, finns ett filter som utvidgar $\mathcal{F}$ och innehåller en av B och B^c .

Ty: Vi visar att (minst) en av $\mathcal{F} \cup \{B\}$ och $\mathcal{F} \cup \{B^c\}$ har äse (och använder sats 5.1). Annars skulle det finnas $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$ med $A_1 \cap B = A_2 \cap B^c = \emptyset$ och därmed $A_1 \cap A_2 = (A_1 \cap A_2) \cap (B \cup B^c) = \emptyset$, motsägelse. $\square$

Så länge det finns $B \subseteq I$ med $B, B^c \notin \mathcal{F}$ kan ett filter $\mathcal{F}$ alltså utvidgas. Om det upprepas (oändligt många gånger) bör man till sist nå ett *ultrafilter*.

Definition 5.3 (ultrafilter):

Ett filter $\mathcal{U}$ på I är ett **ultrafilter** omm för varje $A \subseteq I$: $A \in \mathcal{U}$ eller $A^c \in \mathcal{U}$.

Exempel:

$\mathcal{U} = \{A \subseteq I \mid \iota_0 \in A\}$ för ett $\iota_0 \in I$ är ett **principalt ultrafilter**. Om I är ändlig är alla ultrafilter principala, men för oändliga I finns icke-principala ultrafilter.

Sats 5.3:

För varje filter $\mathcal{F}$ finns ett ultrafilter $\mathcal{U}$ med $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$.

(Som nämndes ovan. Ett strikt bevis kräver ett urvalsaxiom, se senare i kursen. Ett ultrafilter som utvidgar fréchetfiltret på I är icke-principalt, ty inget $\iota_0 \in I$ ingår i alla element i fréchetfiltret.)

Definition 5.4 (relationen $\sim_{\mathcal{U}}$):

Låt $\{\mathfrak{A}_{\iota}\}_{\iota \in I}$ vara $\mathcal{L}$ -strukturer och $\mathcal{U}$ ett ultrafilter på I .

Relationen $\sim_{\mathcal{U}}$ på $\Pi_{\iota \in I} A_{\iota}$ ges av $(a_{\iota}) \sim_{\mathcal{U}} (b_{\iota})$ omm $\{\iota \in I \mid a_{\iota} = b_{\iota}\} \in \mathcal{U}$.

Sats 5.4:

$\sim_{\mathcal{U}}$ är en ekvivalensrelation på $\Pi_{\iota \in I} A_{\iota}$. Dess ekvivalensklasser betecknas $(a_{\iota})_{\mathcal{U}}$.

Ty: Följer av ultrafilteregenskaper och att $\{\iota \in I \mid a_{\iota} = a_{\iota}\} = I \in \mathcal{U}$ (reflexivitet), $\{\iota \in I \mid a_{\iota} = b_{\iota}\} = \{\iota \in I \mid b_{\iota} = a_{\iota}\}$ (symmetri), $\{\iota \in I \mid a_{\iota} = b_{\iota}\} \cap \{\iota \in I \mid b_{\iota} = c_{\iota}\} \subseteq \{\iota \in I \mid a_{\iota} = c_{\iota}\}$ (transitivitet), för alla $(a_{\iota}), (b_{\iota}), (c_{\iota}) \in \Pi_{\iota \in I} A_{\iota}$. $\square$

Definition 5.5 (ultraprodukt, ultrapotens):

Ultraprodukten av $\{\mathfrak{A}_{\iota}\}_{\iota \in I}$ med ultrafiltret $\mathcal{U}$, $\Pi_{\iota \in I} \mathfrak{A}_{\iota} / \mathcal{U}$ (eller $\Pi_{\mathcal{U}} \mathfrak{A}_{\iota}$), är $\mathcal{L}$ -strukturen med

$$\begin{aligned} \text{domän } \Pi_{\iota \in I} A_{\iota} / \mathcal{U} &= \{(a_{\iota})_{\mathcal{U}} \mid (a_{\iota}) \in \Pi_{\iota \in I} A_{\iota}\}, \\ f^{\Pi_{\mathcal{U}} \mathfrak{A}_{\iota}}((a_{\iota}^1)_{\mathcal{U}}, \dots, (a_{\iota}^n)_{\mathcal{U}}) &= (f^{\mathfrak{A}_{\iota}}(a_{\iota}^1, \dots, a_{\iota}^n))_{\mathcal{U}}, \\ R^{\Pi_{\mathcal{U}} \mathfrak{A}_{\iota}}(a_{\iota}^1)_{\mathcal{U}} \dots (a_{\iota}^n)_{\mathcal{U}} &\Leftrightarrow \{\iota \in I \mid R^{\mathfrak{A}_{\iota}} a_{\iota}^1 \dots a_{\iota}^n\} \in \mathcal{U}, \end{aligned}$$

för n -ställiga $f, R \in \mathcal{L}$.

$\Pi_{\iota \in I} \mathfrak{A}_{\iota} / \mathcal{U}$ blir väldefinierad ($f^{\Pi_{\mathcal{U}} \mathfrak{A}_{\iota}}$ och $R^{\Pi_{\mathcal{U}} \mathfrak{A}_{\iota}}$ oberoende av valen av representanter för ekvivalensklasserna $(a_{\iota}^1)_{\mathcal{U}}, \dots$), ty $\mathcal{U}$ är ett filter.

Om alla $\mathfrak{A}_{\iota}$ är samma, $\mathfrak{A}$, kallas ultraprodukten en **ultrapotens**, $\mathfrak{A}^I / \mathcal{U}$.

Sats 5.5 (Łoś):

För varje $\mathcal{L}$ -formel φ med n fria variabler:

$$\Pi_{\iota \in I} \mathfrak{A}_{\iota} / \mathcal{U} \models \varphi((a_{\iota}^1)_{\mathcal{U}}, \dots, (a_{\iota}^n)_{\mathcal{U}}) \Leftrightarrow \{\iota \in I \mid \mathfrak{A}_{\iota} \models \varphi(a_{\iota}^1, \dots, a_{\iota}^n)\} \in \mathcal{U}.$$

(Ultraprodukten avgör sant och falskt med majoritetsbeslut, där majoritet betyder att tillhöra $\mathcal{U}$.)

Ty: Induktion över φ 's form (med definitionerna 2.2, 2.4, 5.5). Vi hoppar över detaljerna. $\square$

Sats 5.6:

Om $\mathfrak{A}$ är en $\mathcal{L}$ -struktur och $\mathcal{U}$ är ett ultrafilter på I är

$$\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{A}^I / \mathcal{U},$$

där $a \in A$ identifieras med elementet $(a)_{\mathcal{U}} \in A^I / \mathcal{U}$ (a_{ι} oberoende av ι).

Ty: A avbildas injektivt i $A^I / \mathcal{U}$, ty om $a \neq b$ är $(a) \not\sim_{\mathcal{U}} (b)$ och för varje tilldelning $\vec{b}$ av värden i A är $\Pi_{\iota \in I} \mathfrak{A}_{\iota} / \mathcal{U} \models \varphi[\vec{b}] \Leftrightarrow \{\iota \in I \mid \mathfrak{A}_{\iota} \models \varphi[\vec{b}]\} \in \mathcal{U} \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi[\vec{b}]$ (enligt Łoś's sats vid första $\Leftrightarrow$). $\square$

Sats 5.7:

Elementära klasser av strukturer är slutna under ultraprodukt.

T.ex. är alla ultraprodukter av grupper grupper, alla ultraprodukter av linjärt ordnade mängder linjärt ordnade mängder etc.

Ty: Om $\mathfrak{A}_\iota \models \varphi$, $\iota \in I$, så $\prod_{\iota \in I} \mathfrak{A}_\iota / \mathcal{U} \models \varphi$, ty $\{\iota \in I \mid \mathfrak{A}_\iota \models \varphi\} \in \mathcal{U} \Leftrightarrow I \in \mathcal{U}$, så alla sentenser φ som definierar klassen satisfieras av ultraprodukten. $\square$

Satsen kan användas ”åt andra hållet” för att visa att **ingen sentensmängd beskriver välgrundade relationer**.

Vi ger en struktur med en välgrundad relation och en ultrapotens av strukturen där relationen inte är välgrundad. Det visar påståendet.

Låt $\mathfrak{A} = (\mathbb{N}, <)$ och $\mathcal{U}$ ett ultrafilter på $\mathbb{N}$ som utvidgar fréchetfiltret. $\mathfrak{A}$ är som bekant välgrundad, men $\{(a^k)_\mathcal{U} \mid k \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset$ saknar minimalt element i $\mathfrak{A}^\mathbb{N}/\mathcal{U}$ då $a_n^k = \max(0, n - k)$, eftersom $(a^j)_\mathcal{U} < (a^k)_\mathcal{U} \Leftrightarrow j > k$.

På motsvarande sätt kan man visa att klassen av sammanhängande grafer inte är elementär, eller klassen av ändliga grupper.

Łoś's sats används ofta med $\mathcal{U}$ en utvidgning av fréchetfiltret. Då gör ultraprodukten varje utsaga sann som är sann i alla utom ett ändligt antal av $\mathfrak{A}_\iota$:na och man kan se många egenskaper hos $\prod_{\iota \in I} \mathfrak{A}_\iota / \mathcal{U}$ utan att känna $\mathcal{U}$ i detalj. Vi ger ett sista exempel.

Exempel (de hyperreella talen, ${}^*\mathbb{R}$):

Låt $\mathfrak{R}$ vara strukturen av de reella talen, med domän $\mathbb{R}$ och språk $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{ring} \cup \{<\}$ (alla med de väntade tolkningarna) och $\mathcal{U}$ ett ultrafilter som utvidgar fréchetfiltret på $\mathbb{N}$. Strukturen ${}^*\mathfrak{R} = \mathfrak{R}^\mathbb{N}/\mathcal{U}$ kallas då **hyperreella tal**.

Enligt konstruktionen är precis samma sentenser i $\mathcal{L}$ sanna i ${}^*\mathfrak{R}$ som i $\mathfrak{R}$, så ”första ordningens predikatlogik kan inte skilja på $\mathbb{R}$ och ${}^*\mathbb{R}$ ”, men med $a_n = \frac{1}{n}$ är $0 < (a)_\mathcal{U} < r$ för varje reellt $r > 0$. Man säger att $(a)_\mathcal{U} \in {}^*\mathbb{R}$ är ett **infinitesimalt** tal. Det går att ”räkna som vanligt” med hyperreella tal och varje funktion på $\mathbb{R}$ är automatiskt definierad på ${}^*\mathbb{R}$ enligt $f((a)_\mathcal{U}) = (f(a_\iota))_\mathcal{U}$ (det påminner om hur varje kontinuerlig funktion som är definierad på $\mathbb{Q}$ entydigt kan fortsättas till $\mathbb{R}$, men för att gå från $\mathbb{R}$ till ${}^*\mathbb{R}$ krävs inget särskilt av f).