

Matematik, KTH

Bengt Ek

november 2017

MATERIAL TILL KURSEN
SF1679, DISKRET MATEMATIK:

Lite om kedjebråk

0. Inledning

Talet π (kvoten mellan en cirkels omkrets och dess diameter) är inte ett rationellt tal (dvs inte kvoten av två heltal), men det kan approximeras godtyckligt nära med rationella tal. T.ex. är

$$\frac{22}{7} = 3,1428\dots, \quad \frac{333}{106} = 3,141509\dots, \quad \frac{355}{113} = 3,14159292\dots,$$

vilka kan jämföras med $\pi = 3,14159265\dots$

Vi skall se hur man på ett systematiskt sätt kan finna goda rationella approximationer till reella tal och också se ”varför” just $\frac{355}{113}$ ligger så nära π , i förhållande till sin nämnare ($|\pi - \frac{355}{113}| < 3 \cdot 10^{-7}$, medan $\frac{1}{113} > 8 \cdot 10^{-3}$).

Kedjebråk (eng. continued fractions), som det handlar om, ansluter nära till Euklides algoritmen och är inte alls bara intressanta för approximation.

Som ytterligare ett exempel skall vi se hur de kan användas för att ganska enkelt visa existensen av transcendent reella tal, dvs tal som inte är algebraiska (inte löser någon (icke-trivial) polynomekvation med heltalskoefficienter).

Beteckningar:

$\mathbb{N}$ är mängden av alla naturliga tal, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ (i Biggs: $\mathbb{N}_0$),

$\mathbb{Z}$ är mängden av alla heltal, $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$,

$\mathbb{Z}_+$ är mängden av alla positiva heltal, $\mathbb{Z}_+ = \{1, 2, 3, \dots\}$ (i Biggs: $\mathbb{N}$),

$\mathbb{Z}_{\geq n}$ är (för $n \in \mathbb{Z}$) mängden av alla heltal som är $\geq n$, $\mathbb{Z}_{\geq n} = \{n, n+1, n+2, \dots\}$,

$\mathbb{Q}$ är mängden av alla rationella tal, $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}_+\}$,

$\mathbb{A}$ är mängden av alla (komplexa) algebraiska tal,

$\mathbb{R}$ är mängden av alla reella tal, $\mathbb{R} = \{0, -7, \frac{237}{88}, \pi, -\sqrt{\frac{5}{12}} + \sqrt[3]{6}, \pi^{\frac{1}{e}}, \dots\}$,

$\mathbb{C}$ är mängden av alla komplexa tal, $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

Kommentar: Med ”kedjebråk” avses här det som ibland kallas **enkla kedjebråk**, med bara 1:or i täljarna (se nästa avsnitt).

1.1. Rationella tal har ändliga kedjebråk

Vi inför kedjebråk enligt:

Definition 1.1:

För $\alpha \in \mathbb{R}$ fås **elementen** i α 's **kedjebråksutveckling**, $a_0, a_1, \dots$, rekursivt:

- $\alpha = a_0 + s_0$, med $a_0 \in \mathbb{Z}$ och $0 \leq s_0 < 1$
(så a_0 är heltalsdelen av α och $s_0 = \alpha - a_0$)
- för $i \in \mathbb{N}$:
om $s_i > 0$: $\frac{1}{s_i} = a_{i+1} + s_{i+1}$, med $a_{i+1} \in \mathbb{Z}_+$ och $0 \leq s_{i+1} < 1$,
om $s_i = 0$: a_j, s_j inte definierade för $j > i$.

Om $s_n = 0$ för något $n \in \mathbb{N}$, sägs α ha en **ändlig kedjebråksutveckling**, vilket betecknas

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}}$$

Då måste, om $\alpha \notin \mathbb{Z}$, tydligen $a_n \geq 2$.

Exempel på ett ändligt kedjebråk:

För $\alpha = \frac{471}{123}$ fås

$$\begin{cases} \alpha = \frac{471}{123} = 3 + \frac{102}{123}, & \text{så } a_0 = 3, s_0 = \frac{102}{123} \\ \frac{1}{s_0} = \frac{123}{102} = 1 + \frac{21}{102}, & \text{så } a_1 = 1, s_1 = \frac{21}{102} \\ \frac{1}{s_1} = \frac{102}{21} = 4 + \frac{18}{21}, & \text{så } a_2 = 4, s_2 = \frac{18}{21} \\ \frac{1}{s_2} = \frac{21}{18} = 1 + \frac{3}{18}, & \text{så } a_3 = 1, s_3 = \frac{3}{18} \\ \frac{1}{s_3} = \frac{18}{3} = 6 + 0, & \text{så } a_4 = 6, s_4 = 0 \\ s_4 = 0, & \text{så } a_j, s_j \text{ är inte definierade för } j > 4 \end{cases}$$

$$\frac{471}{123} = [3; 1, 4, 1, 6] = 3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6}}}}$$

Då man betraktar räkningarna i Euklides algoritm för 471 och 123:

$$\begin{cases} 471 = 123 \cdot 3 + 102, \\ 123 = 102 \cdot 1 + 21, \\ 102 = 21 \cdot 4 + 18, \\ 21 = 18 \cdot 1 + 3, \\ 18 = 3 \cdot 6 + 0 \end{cases}$$

ser man att kedjebråksberäkningen är densamma, fast skriven med kvoter. a_i 'na, elementen i kedjebråksutvecklingen, är kvoterna i Euklides algoritm (som man inte behöver när man bestämmer sgd:n). Detta gäller tydligen allmänt (inte bara i vårt exempel), så eftersom Euklides algoritm för varje par av heltal tar slut i ett ändligt antal steg, har varje kvot av heltal (dvs varje rationellt tal) en ändlig kedjebråksutveckling. Omvänt är värdet av ett ändligt kedjebråk alltid ett rationellt tal (induktion över längden n , $[a_0; a_1, \dots, a_n] = a_0 + \frac{1}{[a_1; a_2, \dots, a_n]}$). Det ger:

Sats 1.1 (ändliga kedjebråk):

Mängden av reella tal α som har ändliga kedjebråksutvecklingar är precis de **rationella talen**, alla $\alpha \in \mathbb{Q}$.

1.2 Irrationella tal har oändliga kedjebråk

Hur är det då med $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$? Kan de bestämmas av sina (oändligt många) element $a_0, a_1, \dots$? Vi skall se att svaret på den frågan är "ja".

Definition 1.2:

Värdet av den **oändliga kedjebråksutvecklingen** med element $a_0 \in \mathbb{Z}$ och $a_i \in \mathbb{Z}_+$ för $i = 1, 2, \dots$ är

$$[a_0; a_1, a_2, \dots] = \lim_{n \rightarrow \infty} [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n].$$

Talen $[a_0; a_1, \dots, a_n]$, $n \in \mathbb{N}$, kallas **konvergenter** för ett (ändligt eller oändligt) kedjebråk $[a_0; a_1, \dots]$ (med a_n definierat).

Vi visar snart att gränsvärdet ovan alltid (dvs för alla sådana $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$) existerar.

Inför $\mathbf{v}_k = (q_k, p_k)$ för $k \in \mathbb{Z}_{\geq -2}$ enligt

$$\begin{cases} \mathbf{v}_{-2} = (q_{-2}, p_{-2}) = (1, 0), \mathbf{v}_{-1} = (q_{-1}, p_{-1}) = (0, 1), \\ \mathbf{v}_k = (q_k, p_k) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}, \text{ där } \frac{p_k}{q_k} = [a_0; a_1, \dots, a_k], \text{sgd}(q_k, p_k) = 1, \text{ för } k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

$\mathbf{v}_k$ är alltså för $k \in \mathbb{N}$ en heltalsvektor i högra halvplanet som entydigt representerar den k :e konvergenten, vars värde ges av $\mathbf{v}_k$:s riktningskoefficient.

För att beräkna $[a_0; a_1, \dots, a_k]$ verkar det naturligt att börja från slutet (med $a_{k-1} + \frac{1}{a_k} = \frac{a_{k-1}a_k + 1}{a_k}$ etc.). Men det kan göras enklare, enligt följande viktiga

Sats 1.2:

För $k \in \mathbb{N}$ gäller $\mathbf{v}_k = a_k \mathbf{v}_{k-1} + \mathbf{v}_{k-2}$, dvs
$$\begin{cases} p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2} \\ q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2} \end{cases}$$

och $1 = q_0 \leq q_1 < q_2 < \dots$, speciellt $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \infty$.

Ty: Låt $[a_1; a_2, \dots, a_k] = \frac{p'_{k-1}}{q'_{k-1}}$ (en $(k-1)$:a konvergent).

Enligt definitionen av $\frac{p_k}{q_k}$ är

$$\frac{p_k}{q_k} = a_0 + \frac{q'_{k-1}}{p'_{k-1}}, \text{ så } \begin{cases} p_k = a_0 p'_{k-1} + q'_{k-1} \\ q_k = p'_{k-1}, \end{cases} \text{ för } k = -1, 0, 1, \dots$$

$((q'_{-1}, p'_{-1}) = (0, 1), (q'_{-2}, p'_{-2}) = (1, 0))$. Att $\text{sgd}(q'_{k-1}, p'_{k-1}) = 1 \Rightarrow \text{sgd}(p'_{k-1}, a_0 p'_{k-1} + q'_{k-1}) = 1$ och $p'_{k-1} \geq 1$ då $k \geq 0$ och $a_1 \geq 1$ (ses av uttrycket för $[a_1; a_2, \dots, a_k]$) har använts.)

Satsen visas nu med induktion över k .

Bas: För $k = 0$ påstås att $\mathbf{v}_0 = a_0 \mathbf{v}_{-1} + \mathbf{v}_{-2} = (1, a_0)$. Stämmer, ty $\frac{p_0}{q_0} = a_0$.

Steg: Antag att påståendet är sant (för alla ändliga kedjebråk) för $k = s \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \text{Då är } p_{s+1} &= a_0 p'_s + q'_s = a_0 (a_{s+1} p'_{s-1} + p'_{s-2}) + (a_{s+1} q'_{s-1} + q'_{s-2}) = \\ &= a_{s+1} (a_0 p'_{s-1} + q'_{s-1}) + (a_0 p'_{s-2} + q'_{s-2}) = a_{s+1} p_s + p_{s-1} \end{aligned}$$

$$\text{och } q_{s+1} = p'_s = a_{s+1} p'_{s-1} + p'_{s-2} = a_{s+1} q_s + q_{s-1}.$$

Antagandet gav att påståendet är sant för $k = s + 1$. Det bevisar satsen. $\square$

$(\mathbf{v}'_s = a_{s+1} \mathbf{v}'_{s-1} + \mathbf{v}'_{s-2}$ eftersom $\frac{p'_s}{q'_s} = [a_1; a_2, \dots, a_{s+1}]$, med a_{s+1} (inte a_s) som sista element.)

Exempel på beräkning av ett ändligt kedjebråk:

$[3; 1, 4, 1, 6]$ kan enligt satsen beräknas

som till höger (t.ex. är $[\frac{157}{41}] = 6 \cdot [\frac{23}{6}] + [\frac{19}{5}]$).

Så $[3; 1, 4, 1, 6] = \frac{157}{41}$ (som är $\frac{471}{123}$ förkortat).

k	-2	-1	0	1	2	3	4
a_k				3	1	4	1
p_k	0	1	3	4	19	23	157
q_k	1	0	1	1	5	6	41.

Sats 1.3 (samband mellan olika konvergenter):

Om $k \in \mathbb{Z}_+$ respektive $k \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ och $a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{Z}_+$ är element i ett kedjebråk, gäller för dess konvergenter

$$\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} - \frac{p_k}{q_k} = \frac{(-1)^k}{q_k q_{k-1}}, \quad \frac{p_{k-2}}{q_{k-2}} - \frac{p_k}{q_k} = \frac{a_k (-1)^{k-1}}{q_k q_{k-2}}$$

och

$$\frac{p_0}{q_0} < \frac{p_2}{q_2} < \frac{p_4}{q_4} < \dots < \frac{p_5}{q_5} < \frac{p_3}{q_3} < \frac{p_1}{q_1}.$$

Ty: Låt $(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)$ beteckna matrisen med $\mathbf{v}_i$ och $\mathbf{v}_j$ som kolonner, dvs $\begin{pmatrix} p_i & p_j \\ q_i & q_j \end{pmatrix}$. Då är för $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} p_{k-1} q_k - p_k q_{k-1} &= \det(\mathbf{v}_{k-1}, \mathbf{v}_k) = \det(\mathbf{v}_{k-1}, a_k \mathbf{v}_{k-1} + \mathbf{v}_{k-2}) = \\ &= -\det(\mathbf{v}_{k-2}, \mathbf{v}_{k-1}) = \dots = (-1)^k \det(\mathbf{v}_{-1}, \mathbf{v}_{-2}) = (-1)^k, \end{aligned}$$

vilket ger den första likheten. Den andra följer från

$$\det(\mathbf{v}_{k-2}, \mathbf{v}_k) = \det(\mathbf{v}_{k-2}, a_k \mathbf{v}_{k-1} + \mathbf{v}_{k-2}) = a_k \det(\mathbf{v}_{k-2}, \mathbf{v}_{k-1}) = a_k (-1)^{k-1}.$$

Det ger olikheterna mellan konvergenterna, ty $q_i \geq 1$ då $i \geq 0$ och $a_i \geq 1$ då $i \geq 2$. $\square$

För oändliga kedjebråk ger olikheterna i sats 1.3 att följderna av udda respektive jämna konvergenter konvergerar (satsen om konvergens av begränsade monotona följder) och eftersom $\lim_{k \rightarrow \infty} (\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} - \frac{p_k}{q_k}) = 0$ är deras gränsvärden lika, så hela följderna av konvergenter konvergerar. Det ger följande sats.

Sats 1.4 (konvergens för oändliga kedjebråk):

För varje följd $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, ($a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_n \in \mathbb{Z}_+$ för $n \in \mathbb{Z}_+$) finns ett entydigt värde för dess kedjebråk

$$[a_0; a_1, a_2, \dots] = \lim_{n \rightarrow \infty} [a_0; a_1, \dots, a_n].$$

$\square$

Sats 1.3 visar mer om hur konvergenterna närmar sig kedjebråkets värde:

Sats 1.5 (avstånden mellan konvergenterna och kedjebråkets värde):

Låt $a_0, a_1, \dots, a_n$ vara element i ett (ändligt eller oändligt) kedjebråk med värde α . Då ligger α mellan $\frac{p_k}{q_k}$ och $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ för $1 \leq k \leq n$ ($\alpha = \frac{p_k}{q_k}$ omm a_{k+1} inte existerar) och

$$|\alpha - \frac{p_k}{q_k}| < |\alpha - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}|$$

och, om a_{k+1} existerar, (sträng olikhet till höger omm a_{k+2} existerar)

$$\frac{1}{q_k(q_k + q_{k+1})} < |\alpha - \frac{p_k}{q_k}| \leq \frac{1}{q_k q_{k+1}}.$$

Ty: Att α ligger mellan $\frac{p_k}{q_k}$ och $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ följer av olikheten i sats 1.3.

Om a_k är det sista elementet i kedjebråket är $\alpha = \frac{p_k}{q_k} \neq \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$.

Annars finns $\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$ och (α mellan $\frac{p_k}{q_k}$ och $\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$, $\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$ mellan α och $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$)

$$|\alpha - \frac{p_k}{q_k}| \leq |\frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}| = \frac{1}{q_k q_{k+1}} \leq \frac{a_{k+1}}{q_{k+1} q_{k-1}} = |\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} - \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}| \leq |\alpha - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}|.$$

Likhet gäller i de yttre olikheterna omm $\alpha = \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$, men då är $a_{k+1} \geq 2$, så strikt olikhet gäller i den mellersta olikheten.

Den första olikheten i sista raden är klar om $\alpha = \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$ (då är $|\alpha - \frac{p_k}{q_k}| = \frac{1}{q_k q_{k+1}}$), annars fås den av att $\frac{p_k + p_{k+1}}{q_k + q_{k+1}} (\neq \alpha)$ ligger mellan α och $\frac{p_k}{q_k}$ (följden $\frac{p_k + i \cdot p_{k+1}}{q_k + i \cdot q_{k+1}}$ går monotont från $\frac{p_k}{q_k}$ till $\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$ då $i = 0, 1, \dots, a_{k+2}$ och om $a_{k+2} = 1$ existerar a_{k+3} , så då är $\alpha \neq \frac{p_{k+2}}{q_{k+2}}$) och $|\frac{p_k}{q_k} - \frac{p_k + p_{k+1}}{q_k + q_{k+1}}| = \dots = \frac{|\det(\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1})|}{q_k(q_k + q_{k+1})}$.

Den andra olikheten i sista raden visades ovan, vid den första raden. $\square$

1.3 Kedjebråksutvecklingar är entydiga

Vi införde i definition 1.1 kedjebråksutvecklingen för ett godtyckligt $\alpha \in \mathbb{R}$ och visade i sats 1.4 att alla oändliga kedjebråk konvergerar mot ett reellt tal, men det återstår att visa att α :s kedjebråk konvergerar mot just α .

Sats 1.6 (kedjebråksutvecklingar existerar för alla reella tal):

För varje $\alpha \in \mathbb{R}$ konvergerar dess kedjebråksutveckling mot α .

Ty: Låt $\alpha \in \mathbb{R}$ ha kedjebråks-elementen $a_0, a_1, \dots$ (enligt definition 1.1).

Om $\alpha \in \mathbb{Q}$ och $a_0, a_1, \dots, a_n$ är dess kedjebråks-element (ändligt antal då $\alpha \in \mathbb{Q}$) är $\alpha = [a_0; a_1, \dots, a_n]$ enligt avsnitt 1.1 (kan också visas med induktion över n).

Om $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ visar vi för $n \in \mathbb{Z}_+$ med induktion påståendet P_n :

$$\alpha \text{ ligger mellan } \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \text{ och } \frac{p_n}{q_n}.$$

Det ger ju att $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, \dots]$ (bara ett reellt tal ligger i alla intervallen).

$\alpha = a_0 + s_0$, där $\frac{1}{s_0}$ har elementen $a_1, a_2, \dots$ och $[a_1; a_2, \dots, a_{k+1}]$ kallas $\frac{p'_k}{q'_k}$.

Bas: $s_0 > 0$, $\frac{1}{s_0} = a_1 + s_1 > a_1$ (ty a_2 är definierad) ger $0 < s_0 < \frac{1}{a_1}$,

så $\frac{p_0}{q_0} = a_0 < \alpha = a_0 + s_0 < a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{p_1}{q_1}$. Så P_1 sant.

Steg: Antag P_k sant, $k \in \mathbb{Z}_+$. Det ger att $\frac{1}{s_0}$ ligger mellan $\frac{p'_{k-1}}{q'_{k-1}}$ och $\frac{p'_k}{q'_k}$, så s_0

mellan $\frac{q'_k}{p'_k}$ och $\frac{q'_{k-1}}{p'_{k-1}}$ och α mellan $a_0 + \frac{q'_k}{p'_k} = \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$ och $a_0 + \frac{q'_{k-1}}{p'_{k-1}} = \frac{p_k}{q_k}$, P_{k+1} sant.

Så P_n är sant för alla $n \in \mathbb{Z}_+$ och satsen sann också för $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. $\square$

Sats 1.7 (kedjebråksutvecklingar är entydiga):

Om $\alpha \in \mathbb{R}$, $b_0 \in \mathbb{Z}$, $b_i \in \mathbb{Z}_+$ då $i \in \mathbb{Z}_+$ och

$$\alpha = [b_0; b_1, \dots] \text{ eller } \alpha = [b_0; b_1, \dots, b_n] \text{ med } b_n > 1 \text{ om } n \neq 0,$$

är $b_0, b_1, \dots$ elementen i α :s kedjebråksutveckling.

Ty: Vi visar med induktion för $n \in \mathbb{N}$ påståendet Q_n :

Om $[a_0; a_1, \dots] = [b_0; b_1, \dots]$, är $a_n = b_n$ eller a_n, b_n båda odefinierade.

Bas: $[a_0; a_1, \dots] = [b_0; b_1, \dots] \Rightarrow a_0 = b_0$, ty a_0 är heltalsdelen av $[a_0; a_1, \dots]$.

Steg: Antag Q_k för ett $k \in \mathbb{N}$.

Om $[a_0; a_1, \dots] = [b_0; b_1, \dots] \in \mathbb{Z}$ är a_1, b_1 och alla följande a_i, b_i odefinierade.

Annars gäller $[a_0; a_1, \dots] = [b_0; b_1, \dots] \Rightarrow [a_1; a_2, \dots] = [b_1; b_2, \dots]$, så (enligt antagandet) $a_{k+1} = b_{k+1}$ (eller odefinierade), så P_{k+1} sant.

Q_n är alltså sant för $n \in \mathbb{N}$ och enligt sats 1.6 är satsen visad. $\square$

Varje reellt tal har alltså en entydigt bestämd kedjebråksutveckling. Utvecklingarna ger en representation av reella tal som är mer "kanoniska" än t.ex. decimalbråk, eftersom de inte innehåller något godtyckligt val av talbas. De lämpar sig dock inte för beräkningar, eftersom det inte i allmänhet är enkelt att uttrycka c_i :na i a_i :na och b_i :na då $\alpha = [a_0; a_1, \dots]$, $\beta = [b_0; b_1, \dots]$, $\gamma = [c_0; c_1, \dots]$ och $\gamma = \alpha + \beta$ eller $\gamma = \alpha \cdot \beta$.

1.4 Konvergener som bästa approximationer

I inledningen nämnde vi approximation av reella tal med rationella. Nu ska vi beskriva hur det hänger ihop med kedjebråk.

Definition 1.3:

Ett rationellt tal $\frac{p}{q}$ med $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}_+$ och $\text{sgd}(p, q) = 1$ sägs vara en **bästa approximation** till $\alpha \in \mathbb{R}$ omm

$$|\alpha - \frac{p'}{q'}| \leq |\alpha - \frac{p}{q}|, p' \in \mathbb{Z}, q' \in \mathbb{Z}_+ \Rightarrow \begin{cases} p' = p, q' = q, \\ \text{eller } q' > q. \end{cases}$$

Bland alla rationella tal som har högst lika stor nämnare som $\frac{p}{q}$ approximerar det alltså α bäst.

Sambandet med kedjebråk ges av

Sats 1.8 (konvergener som bästa approximationer):

För alla $n \in \mathbb{Z}_+$ och varje $\alpha \in \mathbb{R}$ är konvergenterna $\frac{p_n}{q_n}$ för α bästa approximationer till α .

Ty: Det räcker att betrakta α med $0 < \alpha < 1$ (eftersom den n :e konvergenten för $M + \alpha$ är $M + \frac{p_n}{q_n}$ ($M \in \mathbb{Z}$) (med samma nämnare som $\frac{p_n}{q_n}$), där $\frac{p_n}{q_n}$ är den n :e konvergenten för α , och heltal bara approximeras bäst av sig själva).

Vi ska med hjälp av figurerna nedan se att $\mathbf{v}_n$ är en bästa approximation till α (inte i figuren, men den (dvs en linje med riktningskoefficient α) ligger mellan $\mathbf{v}_n$ och $\mathbf{v}_{n-1}$).

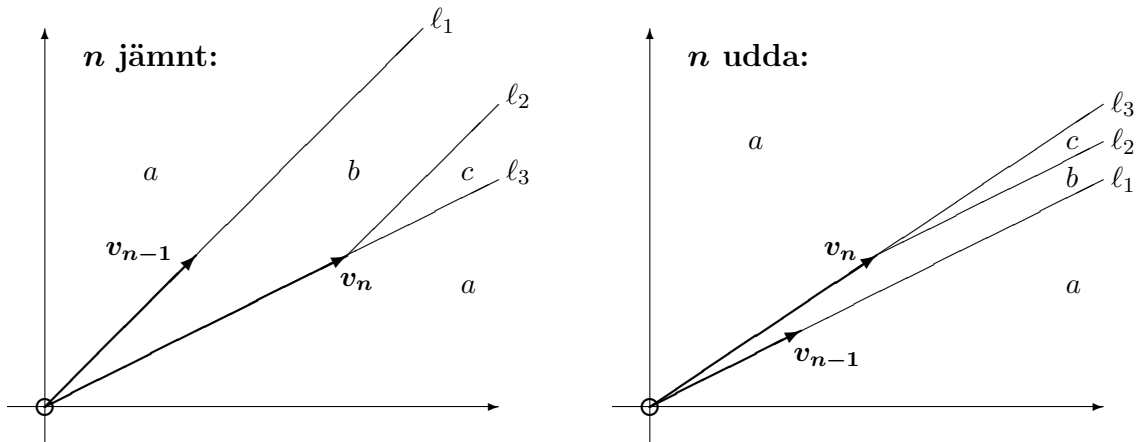


Fig. 1.1 $\mathbf{v}_n$ är en bästa approximation.

(I figurerna innehåller linjerna ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 inte sina ändpunkter $(0, 0)$, $\mathbf{v}_n$, $(0, 0)$ och områdena a, b, c är öppna, dvs de innehåller inte punkter på ℓ_i :na.)

Alla gitterpunkter i a eller på ℓ_1 approximerar α sämre än $\mathbf{v}_n$ gör (sats 1.5).

I b finns inga gitterpunkter, ty vektorerna $\mathbf{v}_{n-1}$ och $\mathbf{v}_n$ spänner upp en parallelogram vars area är 1. Den har inga gitterpunkter andra än hörnen (den skulle annars kunna delas upp i minst tre trianglar av area minst $\frac{1}{2}$).

I c och på ℓ_2 är alla nämnare (dvs x -koordinater) större än q_n (här används att $n \geq 1$, så $q_{n-1} > 0$ och ℓ_2 (som är parallell med $\mathbf{v}_{n-1}$) inte är vertikal).

På ℓ_3 är $\mathbf{v}_n$ den med minst nämnare (eftersom $\text{sgd}(p_n, q_n) = 1$).

Det visar att $\mathbf{v}_n$ är en bästa approximation. □

Bästa approximationer behöver inte vara konvergener, men man kan visa (liknande beviset ovan) att de alla ges av $\mathbf{v}_{n-1} + i \cdot \mathbf{v}_n$, för några $n \in \mathbb{Z}_+$, $i = 0, 1, \dots, a_n$.

1.5 Några exempel på kedjebråksutvecklingar

1. Man vet att $\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, \dots]$ och vi får de första konvergenterna

k	-2	-1	0	1	2	3	4	5
a_k			3	7	15	1	292	1
p_k	0	1	3	22	333	355	103 993	104 348
q_k	1	0	1	7	106	113	33 102	33 215

Att konvergenten $\frac{p_3}{q_3} = \frac{355}{113}$ är en så bra approximation ”förklaras” av att (sats 1.5) a_4 (och därmed q_4) är så stor:

$$\frac{1}{q_3(q_3+q_4)} < |\pi - \frac{p_3}{q_3}| < \frac{1}{q_3 q_4}.$$

Med siffror och $\frac{p_3}{q_3} > \pi$ (eftersom 3 är udda) ger det

$$\frac{355}{113} - \frac{1}{113 \cdot 33102} < \pi < \frac{355}{113} - \frac{1}{113 \cdot 33215},$$

dvs

$$3,14159265301 < \pi < 3,14159265393.$$

I själva verket är $\pi = 3,14159265359$.

(Detta var förstas inte ett sätt att beräkna ett bra värde för π , vi hämtade ju $a_0, \dots, a_4$ ”ur ärmen”. Men det visar att konvergenterna är bra (i vanlig mening) approximationer.)

2. Man kan visa (se t.ex. på internet) att $e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, \dots]$ och det fortsätter (i motsats till π :s kedjebråk) med ett tydligt mönster.

3. Vad är kedjebråket för $\sqrt{2} + 1$?

Jo, $\sqrt{2} + 1 = 2 + (\sqrt{2} - 1) = 2 + \frac{1}{\sqrt{2}+1}$, så $\sqrt{2} + 1 = [2; 2, 2, 2, \dots]$ har ett oändligt kedjebråk. Det bevisar att $\sqrt{2} + 1$ och därmed **$\sqrt{2}$ är irrationellt**.

Antikens grekiska matematiker kände väl till kedjebråk och visste att alla rationella tal har ändliga kedjebråk. En del historiker tror att det var kedjebråket som ledde dem till insikten att $\sqrt{2}$ inte är rationellt.

4. Vad är värdet av $x = [1; 2, 3, 3, 3, \dots]$?

Jo, $x = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{[3; 3, 3, \dots]}}$ där $y = [3; 3, 3, \dots]$ å sin sida uppfyller $y = 3 + \frac{1}{y}$, så

$y^2 - 3y - 1 = 0$ och $y = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$ (eftersom $y > 3$). Det ger $x = \dots = \frac{1}{6}(5 + \sqrt{13})$.

De oändliga kedjebråk som från ett visst element är periodiska är precis de irrationella lösningarna till andragradsekvationer med heltalskoefficienter (men det visar vi inte här).

2.1 Algebraiska tal

Vi skall nu se hur man kan använda kedjebråk för att visa att det finns reella tal som inte är algebraiska.

Definition 2.1:

$\alpha \in \mathbb{C}$ kallas ett **algebraiskt tal**, skrivet $\alpha \in \mathbb{A}$, omm det finns $n \in \mathbb{Z}_+$, $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$, $a_n \neq 0$ sådana att polynomet

$$f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$$

har nollstället α , dvs $f(\alpha) = 0$.

α sägs vara **av grad n** omm n är den lägsta graden för ett sådant $f(x)$.

$\alpha \in \mathbb{C}$ kallas **transcendent** omm det inte är algebraiskt, $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{A}$

Exempel. algebraiska tal av grad 1 är precis de rationella talen och de av grad 2 är precis irrationella rötter till andragradsekvationer med heltalskoefficienter.

Sats 2.1 (Liouilles sats, om approximation av algebraiska tal):

För varje irrationellt algebraiskt tal α av grad n finns $C > 0$ sådant att för alla $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}_+$:

$$|\alpha - \frac{p}{q}| > \frac{C}{q^n}.$$

Ty: Om α är ett nollställe till $f(x)$ som ovan, är $f(x) = (x - \alpha)g(x)$ för ett polynom $g(x)$ av grad $n - 1$ och $g(\alpha) \neq 0$ (annars vore $f(x) = (x - \alpha)^2 h(x)$ för ett polynom $h(x)$, så $f'(\alpha) = 0$ och α av grad högst $n - 1$).

g är kontinuerlig, så det finns $\delta > 0$ sådant att $|x - \alpha| \leq \delta \Rightarrow g(x) \neq 0$.

Om $|\alpha - \frac{p}{q}| \leq \delta$ är $g(\frac{p}{q}) \neq 0$, så

$$\frac{p}{q} - \alpha = \frac{f(\frac{p}{q})}{g(\frac{p}{q})} = \frac{a_n p^n + \dots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n}{q^n g(\frac{p}{q})}$$

Täljaren i HL är ett heltal och eftersom $\alpha \notin \mathbb{Q}$ är den $\neq 0$ ($g(x) \neq 0$ då $|x - \alpha| \leq \delta$).

Om $M > |g(x)|$ då $|x - \alpha| \leq \delta$ (ett sådant M finns eftersom g är kontinuerlig), fås

$$|\alpha - \frac{p}{q}| > \frac{1}{M q^n}.$$

Om $|\alpha - \frac{p}{q}| > \delta$ är

$$|\alpha - \frac{p}{q}| > \frac{\delta}{q^n}.$$

Med $C = \min(\frac{1}{M}, \delta)$ gäller den sökta olikheten för alla $\frac{p}{q}$. □

Irrationella algebraiska tal kan alltså inte approximeras riktigt bra av rationella tal, men vi kan med hjälp av kedjebråk visa att det finns reella tal som approximeras bättre än så.

Det beskrivs i nästa avsnitt.

2.2 Transcendent tal existerar

Enligt sats 2.1 är $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ transcendent om det för varje $C > 0$ och $n \in \mathbb{Z}_+$ finns $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}_+$ med

$$|\alpha - \frac{p}{q}| \leq \frac{C}{q^n}.$$

Sats 2.2 (det finns reella transcendent tal):

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{A} \neq \emptyset$, dvs reella transcendent tal existerar.

Ty: Tag $a_0 \in \mathbb{Z}$ godtyckligt och, givet $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{Z}_+$, $a_{k+1} > q_k^{k-1}$, där $\frac{p_k}{q_k} = [a_0; a_1, \dots, a_k]$. Då är för $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots]$ och $k \in \mathbb{Z}_+$

$$|\alpha - \frac{p_k}{q_k}| < \frac{1}{q_k q_{k+1}} < \frac{1}{a_{k+1} q_k^2} < \frac{1}{q_k^{k+1}} = \frac{1}{q_k^k},$$

där den första olikheten gäller enligt sats 1.5 och den andra enligt sats 1.2 ($q_{k+1} = a_{k+1} q_k + q_{k-1} > a_{k+1} q_k$). Eftersom $q_k \rightarrow \infty$ då $k \rightarrow \infty$ visar det enligt resonemanget före satsens formulering att α är transcendent. $\square$

Senare i kursen skall vi se ett helt annat bevis för att det finns transcendent tal.

2.3 De algebraiska talen är en algebraiskt sluten delmängd till $\mathbb{C}$

Vi skall se att $\mathbb{A}$, som enligt föregående avsnitt är en äkta delmängd till $\mathbb{C}$, har flera egenskaper gemensamma med $\mathbb{C}$. Man kommer nämligen inte utanför $\mathbb{A}$ genom att addera, multiplicera och dividera element i $\mathbb{A}$ (**$\mathbb{A}$ är sluten under räkneoperationerna**) och nollställen till polynom med koefficienter i $\mathbb{A}$ ligger också i $\mathbb{A}$ (**$\mathbb{A}$ är algebraiskt sluten**).

Sats 2.3 ($\mathbb{A}$ är sluten under $+$, $\cdot$ och invers):

$\alpha, \beta \in \mathbb{A}, r \in \mathbb{Q} \Rightarrow \alpha + \beta, \alpha \cdot \beta, r\alpha \in \mathbb{A}$ och $\alpha \in \mathbb{A} \setminus \{0\} \Rightarrow \alpha^{-1} \in \mathbb{A}$.

Ty: Låt $\alpha, \beta \in \mathbb{A}$ ha grad m respektive n och $f(\alpha) = g(\beta) = 0$, $f(x), g(x)$ polynom av grad m, n med heltalskoefficienter a_i, b_i .

Mängden

$$K = \left\{ \sum_{0 \leq i < m, 0 \leq j < n} d_{ij} \alpha^i \beta^j \mid d_{ij} \in \mathbb{Q} \right\},$$

som vi betecknar $K = \langle \alpha^i \beta^j; i = 0, 1, \dots, m-1, j = 0, 1, \dots, n-1 \rangle$ eller bara $\langle \alpha^i \beta^j \rangle$ är då en delmängd till $\mathbb{C}$, som innehåller α^k och β^k för alla $k \in \mathbb{Z}$ (ty $\alpha^m = -\frac{a_{m-1}}{a_m} \alpha^{m-1} - \dots - \frac{a_0}{a_m}$ och $\alpha^{-1} = -\frac{a_m}{a_0} \alpha^{m-1} - \dots - \frac{a_1}{a_0}$ ($a_0 \neq 0$, ty annars vore $\frac{f(x)}{x}$ ett polynom av grad $m-1$ med nollstället α), motsvarande för β^n, β^{-1}).

Med $\gamma = \alpha + \beta, \alpha \cdot \beta, r\alpha, \alpha^{-1}$ gäller då $\gamma^k \in K$ för alla $k \in \mathbb{N}$.

K är ett vektorrum över $\mathbb{Q}$ (dvs med skalärer $\mathbb{Q}$) av dimension högst $m \cdot n$, så $\{1, \gamma, \dots, \gamma^{mn}\}$ är en linjärt beroende mängd i K , så $\sum_{i=0}^{mn} c_i \gamma^i = 0$ för några $c_0, c_1, \dots, c_{mn} \in \mathbb{Q}$ (inte alla 0). Det visar att $\gamma \in \mathbb{A}$ (och har grad $\leq m \cdot n$). $\square$

Att $\mathbb{A}$ är algebraiskt sluten visas på nästan samma sätt,

Sats 2.4 ($\mathbb{A}$ är algebraiskt sluten):

Om $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n \in \mathbb{A}$, $\gamma_n \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{C}$ och $\gamma_n \alpha^n + \gamma_{n-1} \alpha^{n-1} + \dots + \gamma_0 = 0$, så är α ett algebraiskt tal, $\alpha \in \mathbb{A}$.

Ty: $K = \langle \alpha^i \gamma_0^{j_0} \dots \gamma_n^{j_n} \rangle$ ($0 \leq i < m$, $0 \leq j_k < p_k$, där m, p_k är graderna för α, γ_k) är då av ändlig dimension ($\leq s = m \cdot p_0 \cdot \dots \cdot p_n$), så $\{1, \alpha, \dots, \alpha^s\}$ är en linjärt beroende mängd i K och $\alpha \in \mathbb{A}$ som ovan. $\square$